中学生文库



ZHONGXUESHENG WENKU

射影几何趣谈

冯克勤

上海教育出版社

责任编辑 澍 边

封面设计 范一辛

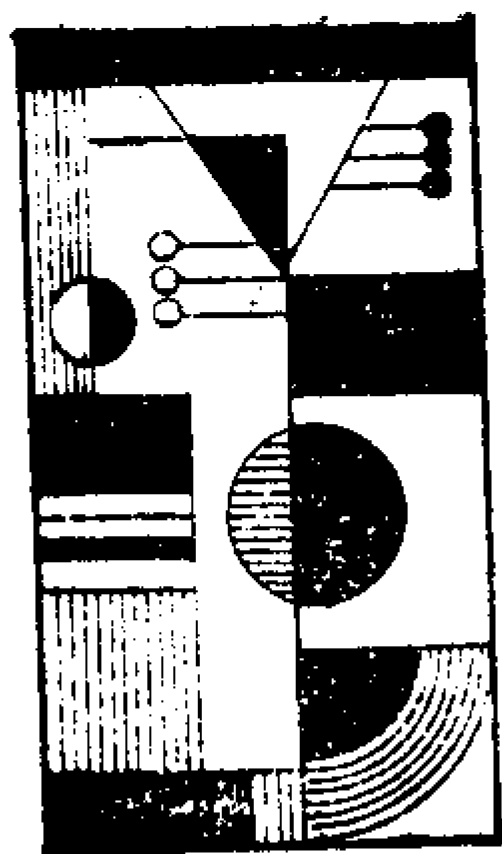
中学生文库 射影几何趣谈

冯 克 勤

上海教育出版社出版发行
(上海永福路123号)
各地新华书店经销 上海市印刷十二厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 5 插页 2 字数 95,000
1987年12月第1版 1987年12月第1次印刷
印数 1—14,300本

统一书号：7150·3976 定价：0.82元

目录



引　言

射影几何具有悠久的发展历史．远在公元前四世纪，古希腊人已经发现了圆锥曲线．公元前三世纪，希腊数学家欧几里得(Euclid)和阿波罗尼(Apollonius)都发表了关于圆锥曲线的专门著作．他们发现了关于圆锥曲线许多有趣的性质，这些性质属于现在射影几何的内容．十五世纪和十六世纪，欧洲的学者由于绘画、雕塑和建筑的需要，发现了透视原理．到了十七世纪，法国数学家笛卡儿(R. Descartes, 1596～1650)引入了直角坐标系，使几何学代数化，许多几何问题归结于代数上的解联立方程组，从而把几何图形的性质归结为一些代数运算，这就是解析几何．解析几何的出现，对于力学、物理学和数学本身的发展，起了很大的推动作用．但是，在另一方面，几何本身仍有它自身的直观性和优美性．与笛卡儿同时代的法国数学家德沙格(G. Desargues, 1591～1661)和帕斯卡(B. Pascal, 1623～1662)创立了射影几何．1639年，德沙格通过对透视的研究，建立了无穷远点和射影空间概念．1649年，帕斯卡



德沙格(G. Desargues)



帕斯卡(B. Pascal)

发现了关于圆锥曲线的著名定理. 由此, 一个优美的数学学科——射影几何产生了.

十八世纪是解析几何得到广泛应用的时代, 而十九世纪则是射影几何大发展的时代. 射影几何的发展, 首先应归功于法国另一个数学家彭色列(J. V. Poncelet, 1788～1867). 他于1822年出版了有名的著作«关于图形的射影性质», 系统研究了图形在中心射影之下不变的性质. 在这之前, 射影几何是在欧氏几何的框架里进行研究的. 但是欧氏几何中的最基本概念——距离, 以及角度、面积等性质, 在中心射影之下是变化的. 既然是这样, 为什么射影几何一定要依附于以距离为基石的欧氏几何? 于是, 在1847年, 德国数学家冯·施道特(K. G. C. von Staudt, 1798～1867)等人建立了射影几何自己的公理系统. 至此, 射影几何作为一个独立的几何学科, 基本上完整地建立起来. 射影几何有别于欧氏几何, 最显著的差别是射影几何中没有"直线平行"这个概念, 在射影平面中的任意两条不同的射影直线均恰好

交于一点．在这期间，法国数学家庞加莱(H. J. Poincaré, 1854～1912)，匈牙利数学家波约依(J. Bolyai, 1802～1860)和俄国数学家罗巴切夫斯基(Н. И. Лобачевский, 1792～1856)各自独立地建立了另一些非欧几何的模型．在这些不同的几何学的基础上，1872年德国数学家克莱因(F. Ch. Klein, 1849～1925)在著名的爱尔兰根纲领中给几何学下了一个经典的定义：几何学是研究空间在某个变换群下不变性的一门学问．

以上我们扼要地叙述了射影几何的产生和发展，以及射影几何在整个几何学发展中所处的地位．十九世纪是射影几何的光辉时代，以至于当时英国数学家凯莱(A. Cayley, 1821～1895)说过这样一句名言：一切几何都是射影几何!

在这本小册子里，我们打算通俗地介绍平面射影几何当中一些有趣的定理和概念．我们也以大量的例子来说明，如何利用射影几何的知识和方法来解决平面几何学中的问题．从上面关于几何学的发展历程中看出，解析几何和射影几何是以不同的风格平行地前进；与此同时，它们也是相互渗透和相互促进的．在射影几何中采用了解析几何的手段和工具，如射影坐标等．但是，我们在本书中更多的是采用几何方法，以体现射影几何本身的内在美．我们也说过，射影几何已是一门独立的几何学科，它有着自己的公理系统．但是，作为一本通俗性读物，我们不打算从公理出发严格地板着面孔地讲述，而宁愿先从射影几何中一个精

彩的定理——帕斯卡定理出发.我们在第一章中,先给出这个优美定理的一个初等几何的证明;然后,再给出另外两个证明,后一个证明中体现出射影几何的思想,特别是引出了中心射影的概念和添加无穷远点的自然想法. 随后,在第二章,我们逐节介绍平面射影几何中的主要概念(射影平面,射影坐标,复比,对偶性,配极理论等)和主要定理,尤其是要着重讲述关于圆锥曲线的一些优美性质,以及如何用这些概念和性质解决平面几何中的问题. 最后,在第三章中,我们讲述射影几何在整个几何学中的地位,告诉大家什么是射影几何,介绍它的"子几何"——仿射几何,再说明欧氏几何又是仿射几何的"子几何". 我们用射影几何构作出非欧几何的模型. 使大家理解克莱因的几何定义,并且懂得在现实世界中存在着许多不同的几何.

我们希望本书能使读者增强几何直观形象思维的能力和对几何学明快典雅风格的喜爱. 另一方面,我们(特别是在书的后一半)也使用了一些代数工具(解线性方程组的行列式理论,坐标方法等),希望读者对于这些中学数学知识能够灵活运用和融会贯通,因为整个数学是一个有机的整体,而许多新思想往往在不同学科的交汇处滋生和发展起来,射影几何充分体现了这一点.

一、从帕斯卡定理谈起

1. 帕斯卡定理和它的初等证明

帕斯卡在十六岁的时候发现了下面一个美妙的定理:

帕斯卡定理 设 $ABCDEF$ 是圆 O 的内接六边形. 对边 AB 和 DE 交于点 X, 对边 BC 和 EF 交于点 Y, 对边 CD 和 AF 交于点 Z, 则 X、Y 和 Z 在一条直线上(图1-1).

帕斯卡的许多关于圆锥曲线的著作, 不幸都失传了. 德国数学家莱布尼茨(G. W. Leibniz, 1646~1716)说他看见过帕斯卡的这个定理, 并且将它称作是“神奇的六边形”. 我们不知道当年帕斯卡是如何证明这个定理的, 但是现在人们已经给出它的许多种证明. 本章中我们给出其中的三个证明, 下一章中还要给出另一个证明. 在这一节中, 我们先给出一个初等几何的证明. 为此, 我们需要两个预备性定理.

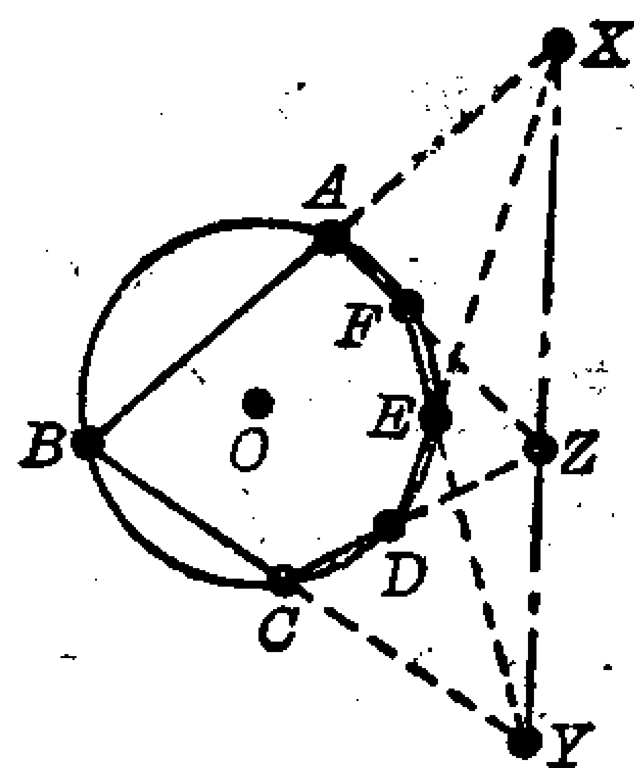


图 1-1

预备定理1 设圆 O 和圆 O' 交于两个点 P 和 Q. 过点 P 作直线 AB, 与圆 O 和 O' 分别交于点 A 和 B. 过点 Q 作直线 $A'B'$, 与圆 O 和 O' 分别交于点 A' 和 B'. 则 $AA' /\!/ BB'$.

证明 连结 PQ(参见图1-2). 由圆内接四边形的性质可知 $\angle\alpha=\angle\beta$、$\angle\beta=\angle\gamma$. 于是 $\angle\alpha=\angle\gamma$. 从而 $AA' /\!/ BB'$. 证毕.

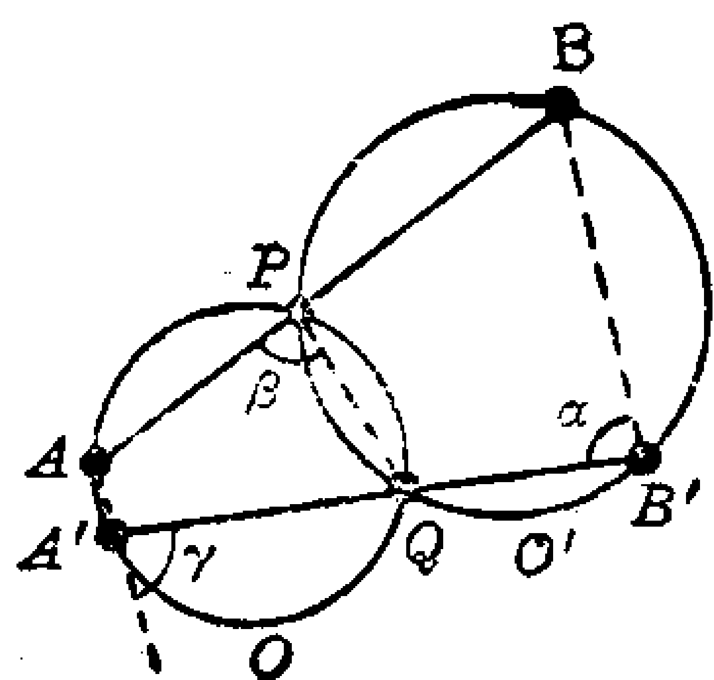


图 1-2

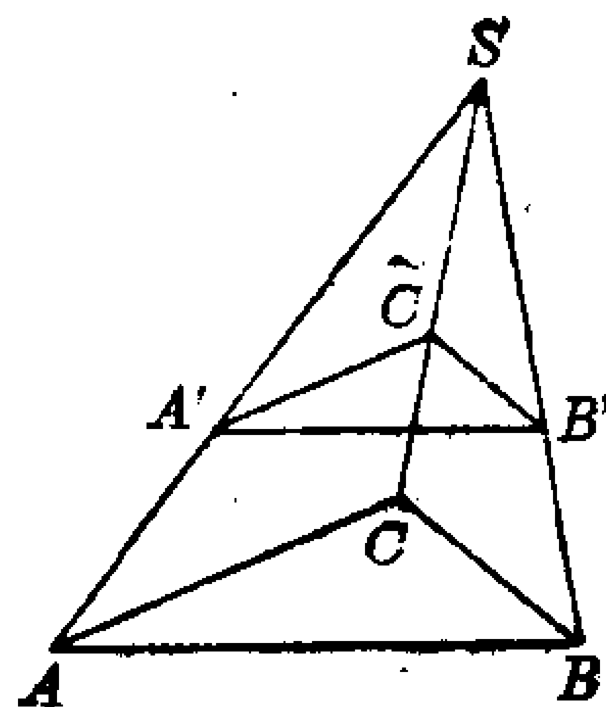


图 1-3

预备定理2 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的对应边平行, 即 $AB /\!/ A'B'$、$BC /\!/ B'C'$、$CA /\!/ C'A'$. 如果直线 AA'、BB'、CC' 两两相交, 则这三条直线必相交于一点.

证明 设 AA' 和 BB' 交于点 S. 我们只需证明 C' 一定在直线 SC 上. 现在过 A' 作直线平行于 AC, 并且与直线交于点 $\tilde{C}$. 再连结 $\tilde{C}B'$(图1-3). 由于 $AC /\!/ A'\tilde{C}$, 从而 $\triangle A'\tilde{C}S \backsim \triangle ACS$. 于是

$$\frac{A'S}{AS}=\frac{\tilde{C}S}{CS}.$$

同样地, 由于 $AB /\!/ A'B'$, 可知

$$\frac{A'S}{AS}=\frac{B'S}{BS}.$$

于是 $$\frac{\widetilde{C}S}{CS}=\frac{B'S}{BS}.$$

由此可知 $\triangle \widetilde{C}B'S \backsim \triangle CBS$. 于是 $\widetilde{C}B' /\!/ CB$. 所以 $\widetilde{C}$ 是过 A' 和 B' 分别与 AC, BC 平行的两条直线的交点. 但是这个交点应当是 C', 所以 $\widetilde{C}=C'$. 由于 $\widetilde{C}$ 在直线 SC 上, 从而 C' 在直线 SC 上. 这就证明完毕.

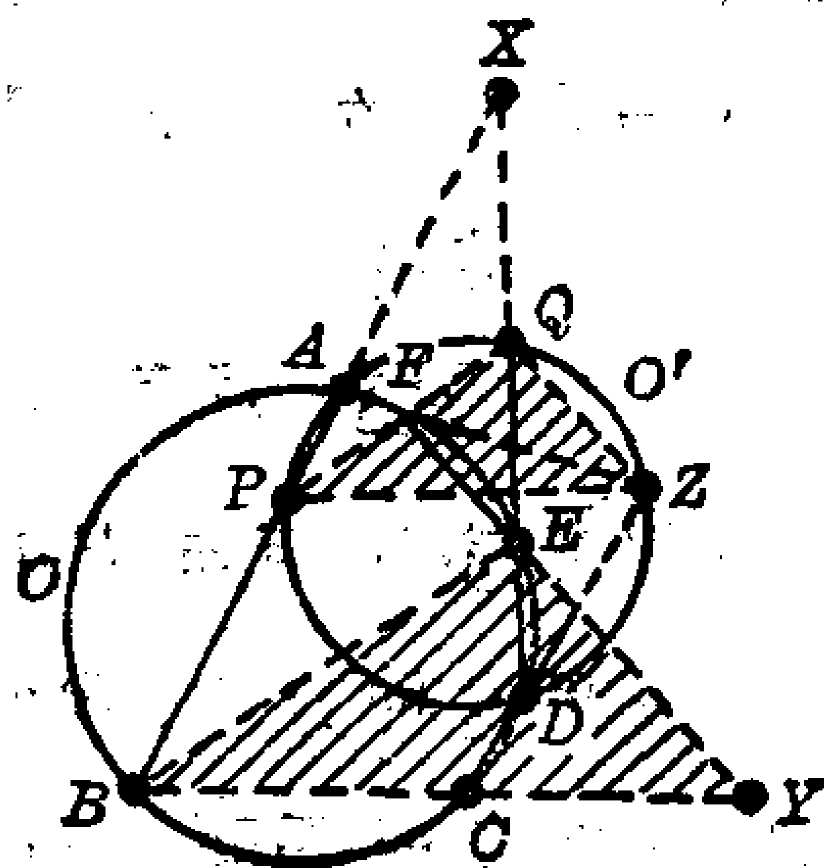


图 1-4

现在我们来证明帕斯卡定理(参见图1-4). 过 A、D、Z 三点作圆 O'. 圆 O' 与直线 AB 已有交点 A. 设另一个交点为 P(注意: 如果 $A=P$, 即 AB 与圆 O' 相切的时候, 下面的证明仍有效). 圆 O' 与直线 DE 除 D 外还交于一点 Q. 由预备定理1可知 $PQ /\!/ BE$, $QZ /\!/ EY$, $PZ /\!/ BY$. 再由预备定理2便知 ZY 过 BP 和 EQ 的交点 X. 换句话说, X、Y、Z 三点在一条直线上. 这就证明了帕斯卡定理.

这个证明颇为别致. 但是添加辅助圆 O' 和众多的辅助线, 着实需要一点巧妙的想法. 下面介绍的两个证明, 也都具有新的构思.

2. 反　演

——帕斯卡定理的第二个证明

帕斯卡定理的第二个证明采用一种新的想法, 即采用

几何图形的反演．我们先来介绍什么是平面上的反演．

在平面上取一点 P，再取定一个正实数 k．对于平面上另一点 X（这里 $X\neq P$），在射线 PX 上有唯一的一点 X'，满足

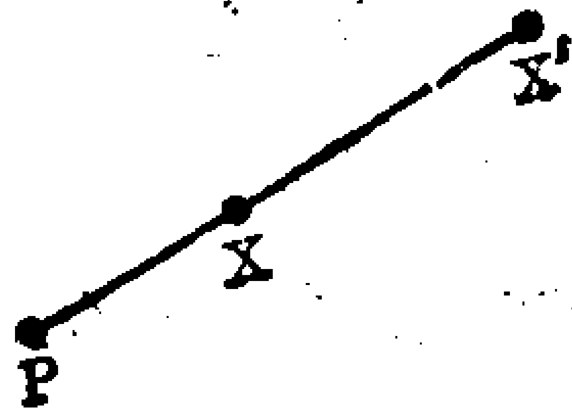


图 1-5

$$\overline{PX}\cdot\overline{PX'}=k^2, \qquad (*)$$

其中 $\overline{PX}$ 表示两点 P 和 X 之间的距离，即线段 PX 的长度．按照这种方法，我们把平面上除了 P 之外的每个点 X 都唯一地变成平面上点 $X'(\neq P)$．我们把平面上的这个变换 π 叫作是一个反演．点 P 叫作反演中心，k 叫作反演半径．点 $X(\neq P)$ 的反演点 X' 也记作 $\pi(X)$．由定义不难看出，如果 X' 是 X 的反演点，则 X 是 X' 的反演点，即：若 $X'=\pi(X)$，则 $X=\pi(X')$．所以，一方面，不仅平面上除 P 之外每个点 X 均变成唯一的反演点 X'，而且另一方面，平面上除 P 之外的任意一点 A 也均是某个点的反演点，因为若 $B=\pi(A)$，则事实上 A 就是 B 的反演点：$\pi(B)=A$．于是，以 P 为反演中心的反演，把去掉点 P 的平面变到它自身之上，并且是一一对应．这样的事情我们以后还要遇到很多次．今后我们把某个几何图形到它自身之上的点之间的一一对应都叫作是一个变换．于是，我们遇到了变换的第一个例子：平面上以点 P 为中心的每个反演都是平面除掉一点 P 之后所得到的“有洞”平面上的一个变换．当然，这个变换不仅与反演中心 P 有关，而且与反演半径 k 也有关．

反演变换有许多有趣的性质. 现在我们只叙述今后证明帕斯卡定理所需要的一些性质，其他性质留给大家作为习题. 以下用 π 表示以点 P 为中心，k 为半径的反演.

性质 1 设圆 O 是以 P 为圆心 k 为半径的圆. 则平面上点 X 等于它的反演点 $X'=\pi(X)$ 的充分必要条件是点 X 在圆 O 上.

证明 这可由反演定义中的 (*) 式直接推出. 因为 $X=\pi(X)=X'$ 的充分必要条件是 $\overline{PX}\cdot\overline{PX}=k^2$，即 $\overline{PX}=k$. 这相当于说点 X 在圆 O 上. 证毕.

性质 1 表明，反演 π 的不动点恰好是圆 O 上的那些点. 圆 O 叫作反演 π 的**反演圆**. 从(*)式同样可知，π 把反演圆外部的点变到反演圆的内部(若 $\overline{PX}>k$，则 $\overline{PX'}<k$)，而把反演圆除去点 P 之后的内部变成反演圆的整个外部.

性质 2 设圆 Ω 不过点 P，则反演 π 把圆 Ω 变成圆.

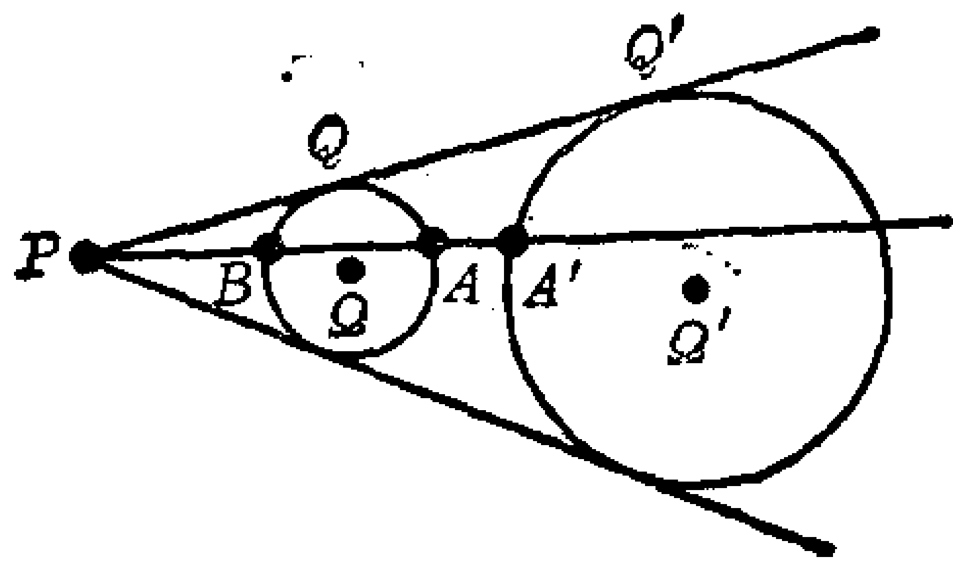


图 1-6

证明 先设点 P 在圆 Ω 的外面(见图 1-6). 设 A 是圆 Ω 上一点. PA 与圆 Ω 交于另一点 B. 则 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=c^2$，其中 c 是过点 P 作圆 Ω 的切线 PQ 的切线长度. 令 $A'=\pi(A)$，则 $\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=k^2$. 于是 $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA'}}$ 为常数 $\left(\dfrac{c}{k}\right)^2$. 当 A 跑过圆 Ω 时，点 B 也跑过圆 Ω. 由于 $\overline{PB}$ 与 $\overline{PA'}$ 之间有

固定的比值，可知点 A' 描出的曲线应当与点 B 描出的曲线(即圆 Ω)相似，从而也是一个圆 Ω'，这就证明完毕．(请读者证明当 P 在圆 Ω 内的情形．)

除了圆 Ω 反演成圆 Ω' 之外，从证明中我们还可以看出：圆 Ω 上切点 Q 的反演是圆 Ω' 上的切点 Q'，并且当点 A 沿着圆 Ω 转动时，反演点 A' 以相反的方向沿着圆 Ω' 转动．

在叙述反演的另一个性质之前，我们先讲一下什么是两个相交圆的夹角．设圆 O 和圆 O' 相交于两个点 A 和 B (图 1-7)，则 $\angle OAO'=\angle OBO'$，这里 O 和 O' 分别是两个圆的圆心．我们把这个角度称作是这**两个圆的夹角**．

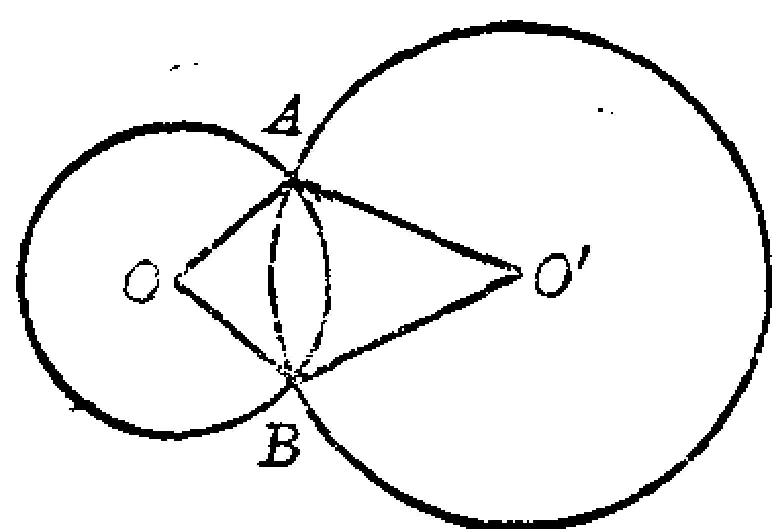


图 1-7

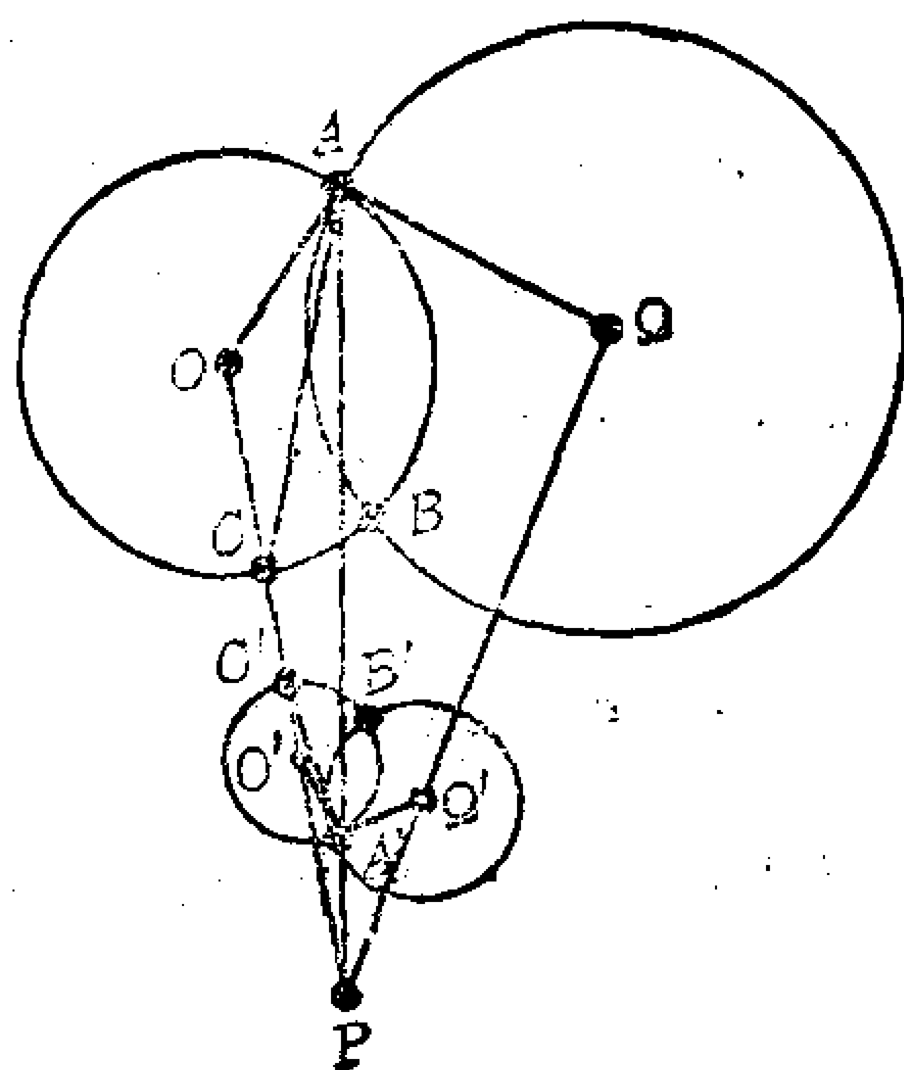


图 1-8

性质 8 设圆 O 和圆 Ω 相交，点 P 在此两圆的外部．反演 π 把圆 O 和圆 Ω 分别变成圆 O' 和圆 Ω'．则圆 O 和圆 Ω 的夹角等于圆 O' 和圆 Ω' 的夹角．

证明 我们以 O、Ω、O'、Ω' 分别表示四个圆的圆心．令 $A'=\pi(A)$、$B'=\pi(B)$，其中 A 和 B 是圆 O 和圆 Ω 的两个

交点. 从性质2的证明可知, A' 和 B' 是圆 O' 和圆 Ω' 的两个交点,并且 P、A、A' 在一条直线上. P、O、O' 也在一条直线上. 设直线 PO 与圆 O 交于点 C, $C'=\pi(C)$,则 C' 是直线 PO 与圆 O' 的交点(见图1–8). 由于 $\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=k^2=\overline{PC}\cdot\overline{PC'}$,可知 $\triangle ACP\backsim\triangle C'A'P$. 从而

$$\angle CAP=\angle A'C'P=\angle O'A'C'. \tag{1}$$

此外还有

$$\begin{aligned}\angle OAC=\angle OCA&=180^\circ-\angle ACP\\&=180^\circ-\angle C'A'P=\angle C'A'A.\end{aligned} \tag{2}$$

将(1)和(2)式两边相加,便得到 $\angle OAP=\angle O'A'A$. 同样可以证明 $\angle\Omega AP=\angle\Omega'A'A$. 将后两式相加,就得到 $\angle OA\Omega=\angle O'A'\Omega'$. 这就证明了性质3.

现在我们准备利用反演给出帕斯卡定理的第二个证明. 首先,我们仍需要两个预备定理,这两个预备定理本身也是很有意思的.

预备定理3 (梅内劳斯(Menelaus,公元80年左右)定理). 在 $\triangle ABC$ 的三边 AB、AC 和 BC 的延长线上分别取点 X、Z 和 Y,如果

$$\frac{AX}{BX}\cdot\frac{BY}{CY}\cdot\frac{CZ}{AZ}=1,$$

则 X、Y、Z 三点在一条直线上.

证明 设直线 XZ 与直线 BC 交于 Y'(图1–9). 我们只需证明

$$\frac{AX}{BX}\cdot\frac{BY'}{CY'}\cdot\frac{CZ}{AZ}=1 \tag{*}$$

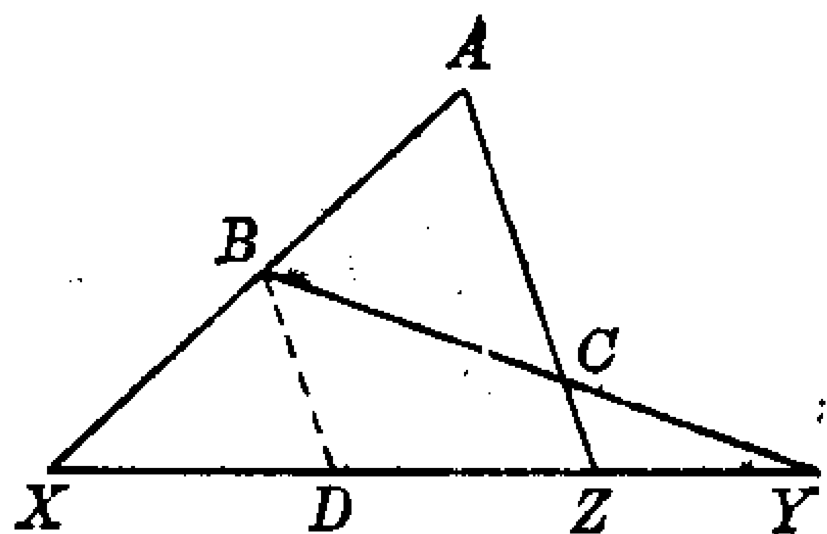


图 1-9

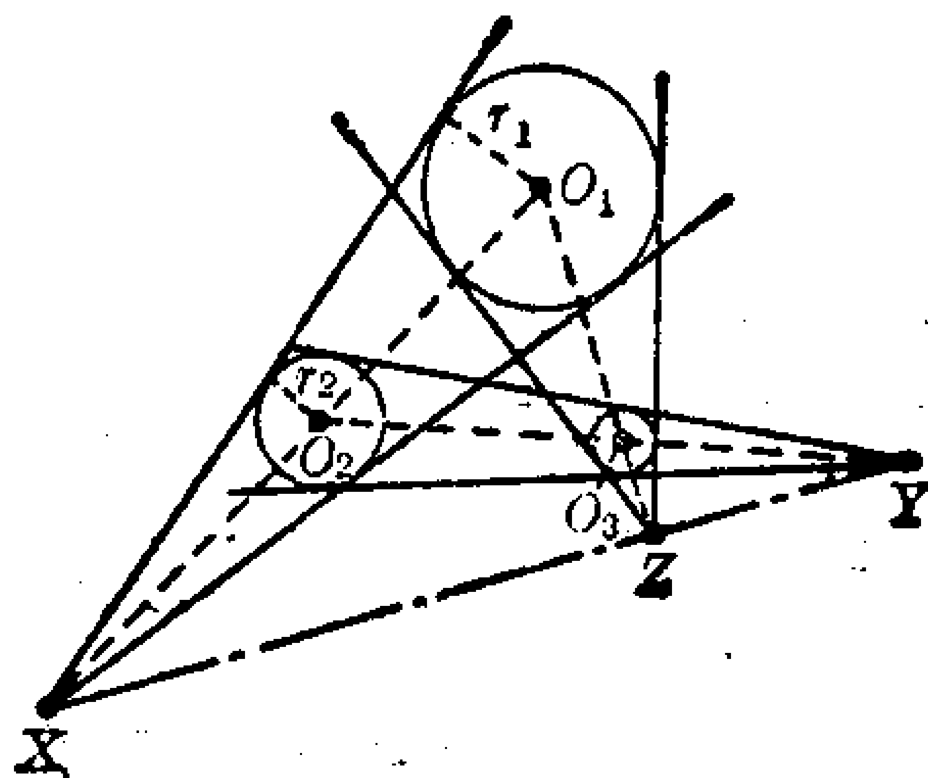


图 1-10

因为根据此式和定理条件可推出

$$\frac{BY'}{CY'}=\frac{BY}{CY},$$

由于 Y' 和 Y 均在直线 BC 上，从而必然 $Y'=Y$. 这便可以证明 X、Y、Z 共线.

为证(*)式，过 B 作平行于 AZ 的直线，与 XZ 交于 D. 由 $BD /\!/ AZ$ 可知

$$\frac{AX}{BX}=\frac{AZ}{BD}、\frac{BY'}{CY'}=\frac{BD}{CZ},$$

由此即得(*)式. 这就证明了梅内劳斯定理.

预备定理 4 设 O_1、O_2、O_3 是大小均不相等的三个圆. X 是圆 O_1 和圆 O_2 的公切线交点，Y 是圆 O_2 和圆 O_3 的公切线交点，Z 是圆 O_1 和圆 O_3 的公切线交点. 则 X、Y、Z 三点在一条直线上.

证明 设三个圆的圆心分别为 O_1、O_2 和 O_3，而半径分别为 r_1、r_2 和 r_3(图 1-10). 不难看出 X、O_2、O_1 在一条直线上，并且

$$\frac{O_1X}{O_2X}=\frac{r_1}{r_2}.$$

同样地，

$$\frac{O_2Y}{O_3Y}=\frac{r_2}{r_3}, \qquad \frac{O_3Z}{O_1Z}=\frac{r_3}{r_1}.$$

于是
$$\frac{O_1X}{O_2X}\cdot\frac{O_2Y}{O_3Y}\cdot\frac{O_3Z}{O_1Z}=1.$$

由梅内劳斯定理即知 X、Y、Z 共线．证毕．

帕斯卡定理的第二个证明　令 $k^2=\overline{XA}\cdot\overline{XB}$．设 π 是以 X 为中心以 k 为半径的反演．由于 $\overline{XA}\cdot\overline{XB}=k^2$，从而 A 和 B 分别反演成 B 和 A．又由于 E 和 D 在过 X 的同一射线上，并且，由圆的性质知道，$\overline{XE}\cdot\overline{XD}=\overline{XA}\cdot\overline{XB}=k^2$，故 $\pi(E)=D$，$\pi(D)=E$．根据反演性质 2，π 将圆 O 仍变成某个圆 O'．但是圆 O 上的点 A、B、D、E 分别变成 B、A、E、D，它们应当在圆 O' 上，所以圆 O' 等于圆 O．换句话说，反演 π 将圆 O 变成自身．设 α 是一个很小的角度．我们作圆 Ω_1 和圆 O 交于 A、D 两点，并且这两个圆的夹角为 α（见图1-11）．不难看出，对于给定的角 α，满足这样条件的圆 Ω_1 是存在并且唯一的．类似地，我们作圆 Ω_2 与圆 O 交于 B 和 E，并且夹角为 α，再作圆 Ω_3 与圆 O 交于 C 和 F，并且夹角也为 α．注意点 X、Y、Z 均在圆 O 的外面．而当角 α 很小时，圆 Ω_1，Ω_2 和 Ω_3 都几乎与圆 O 重合在一起．所以，我们总可选取充分小的角 α，使得 X、Y、Z 仍旧在圆 Ω_1，Ω_2 和 Ω_3 的外面（其所以这样作，是因为我们要利用反演的性质 3）．由于圆

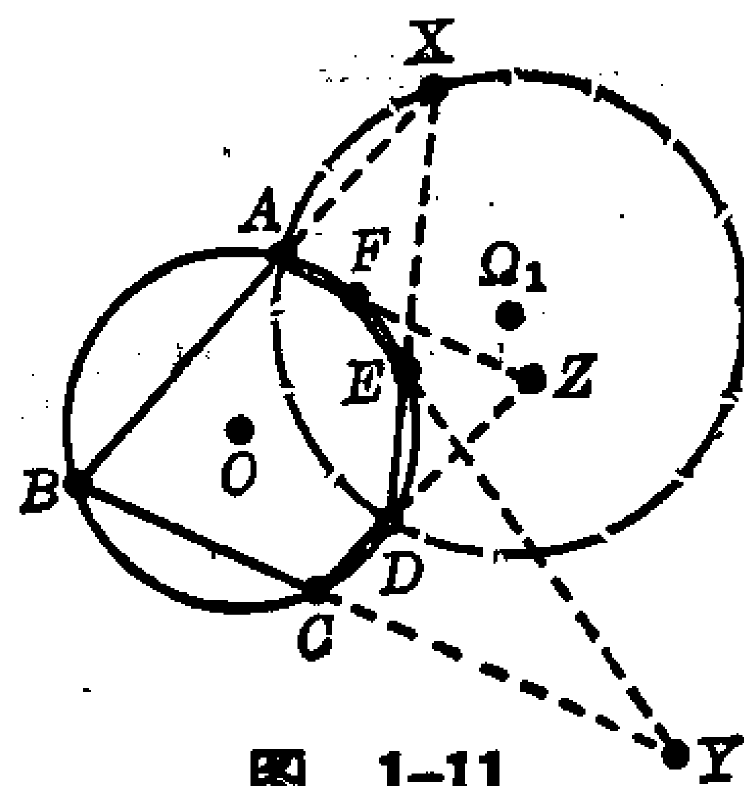


图 1-11

O 和圆 Ω_1 交于 A 和 D, 并且夹角为 α, 根据反演性质 3, 圆 Ω_1 通过反演变成的圆应当与圆 O 反演得到的圆交于 $\pi(A)=B$ 和 $\pi(D)=E$, 并且夹角仍旧是 α. 但是圆 O 反演后仍旧是圆 O, 所以圆 Ω_1 反演变成的圆恰好是圆 Ω_2! 于是, 根据反演性质 2 证明的后面所述, X 应当是圆 Ω_1 和圆 Ω_2 的公切线交点. 同样地, Y 是圆 Ω_2 和圆 Ω_3 的公切线交点, Z 是圆 Ω_1 和圆 Ω_3 的公切线交点. 再由预备定理 4, 即知 X、Y、Z 在一条直线上. 这就证明了帕斯卡定理。

练习题（一）

（设 π 是以 P 为中心、以 k 为半径的反演）

1. 对于 P 在圆内的情形, 证明反演性质 2.

2. 设 l 是不过点 P 的一条直线, 试问反演 π 将直线 l 变成什么图形?

3. 图 1-2 只画出预备定理 1 的一种情形. 试问还可能有哪些情形? 对于这些情形, 试给出预备定理 1 的证明.

3. 中心射影

——为什么要引入无穷远点?

我们在下节要给出帕斯卡定理的第三个证明. 这个证明和第二个证明在想法上有相似之处, 即仍旧利用几何图形的某种变换. 我们这里要采用的变换叫中心射影. 这种变换在射影几何中是极为重要的.

设 π 和 π' 是空间的两个相交的平面，交线为 l. P 是不在上述两平面内的一个点. 对于平面 π 上的点 A，如果直线 PA 与平面 π' 相交于点 A'，我们就把平面上的点 A 变为平面上的点 A'(图 1-12). 这时，称点 A' 是点 A 的射影，而点 P 叫作射影中心. 这样的变换叫作是以 P 为中心的中心射影.

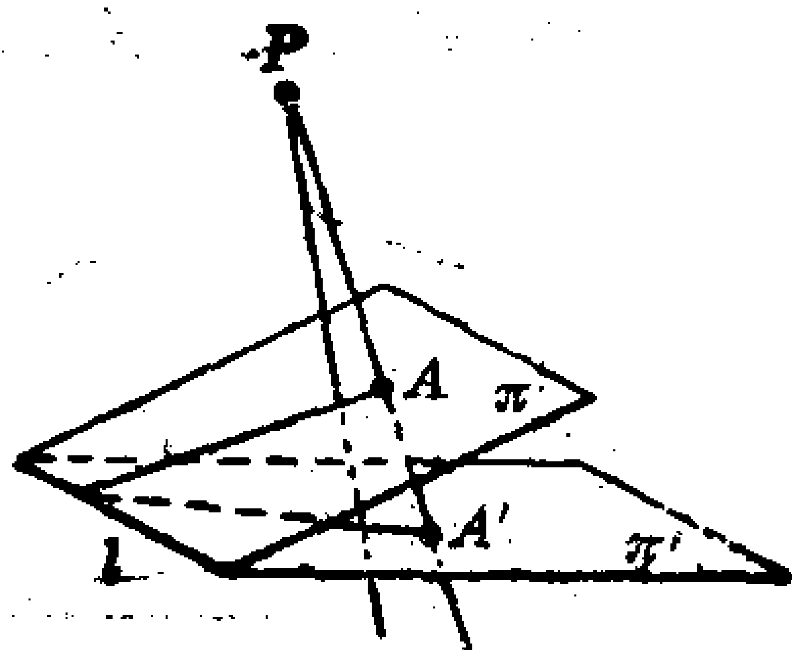


图 1-12

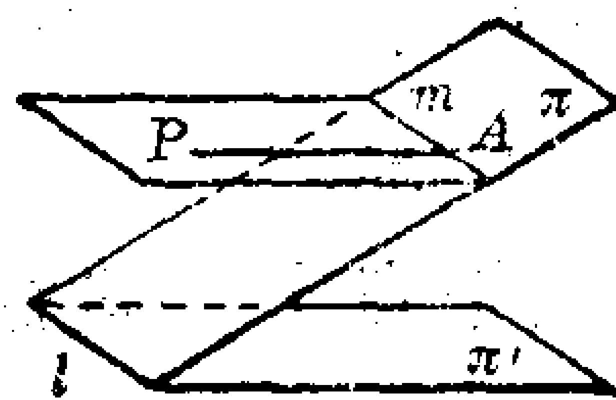


图 1-13

但是，我们在使用"变换"这一词的时候需要小心. 因为我们在第二节中说过，变换需要是一一对应. 如果 PA 碰巧与平面 π 平行，那末点 A 在平面 π' 上就没有射影. 更一般地，过 P 作一平面与平面 π' 平行，那末这平面必与平面 π 相交. 设交线为 m，则对于直线 m 上任意一点 A，直线 PA 均与 π' 平行，从而点 A 在平面 π' 上没有射影. 于是，整个直线 m 在平面 π' 上都没有射影(图 1-13). 类似地，过点 P 作平行于 π 的平面，与平面 π' 相交于直线 m'，则整个直线 m' 上的点都不是平面 π 上点的射影. 为了使得中心射影是一一对应，我们需要从平面 π 和 π' 中分别挖去一条直线 m 和 m'. 这时不难看出，中心射影将"有缝平面" π 变成"有缝平面" π' 是一一对应. 但是，如果取不同的点 P 作

为射影中心，我们需要在平面 π 和 π' 中挖去不同的直线。如果我们想要同时研究从平面 π 到平面 π' 的许多个中心射影，那就要把两个平面挖得个七零八落，这实在不是一件令人愉快的事情。1639 年，德沙格想到：为了中心射影是一一对应，我们固然可以把平面 π 中没有射影的一条直线 m 挖掉。但是为什么不可以在平面 π' 中添加一条直线，使得直线 m 射影到它的上面呢？事实上，德国天文学家开普勒 (J. Kepler, 1571～1630) 就已经想到了这一点。

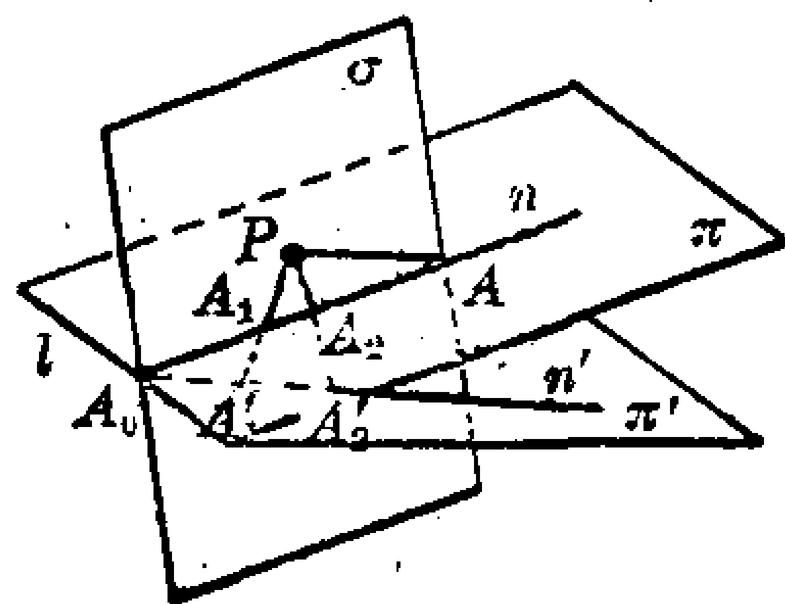


图 1-14

我们把点 P 想象成是太阳。取平面 π 上任一条直线 n，过直线 n 和该直线外的点 P 可作唯一的平面 σ。如果直线 n 与直线 l 相交（l 是平面 π 和 π' 的交线），设 A_0 是它们的交点，则 A_0 同时在平面 σ 和 π' 上，从而平面 σ 和 π' 相交。设交线为 n'。不难看出，太阳 P 照射在平面 π 中的直线 n 上时，在平面 π' 中投射的影子就是直线 n'。不过，若 A 是 n 上一点，而光线 PA 与平面 π' 平行时，点 A 在平面 π' 上没有投影。让我们设想有一个人从点 A_0 沿着直线 n 走向点 A（见图 1-14）。那末当他通过点 A_1、A_2、… 时，他在直线 n' 上的影子会距离点 A_0 愈来愈远，当他很接近点 A 的时候，他的影子落到距离 A_0 非常远的地方。所以点 A 的影子落在直线 n' 的“无穷远”点上。因此，我们需要在直线 n' 上添加一个无穷远点，使得点 A 投影到它上面。如果这个人从

点 A 继续向前走，一直走到直线 n 的无穷远处 A_∞，那末太阳照在他身上的光线与直线 n 平行，从而这条光线与直线 n' 交于一点 A'_∞. 于是点 A'_∞ 就是 n 上无穷远点的投影点. 所以，如果直线 n 和 n' 均分别添加一个无穷远点，那末直线 n 上的每个点在直线 n' 上均有唯一的投影，而直线 n' 上的每个点也都是直线 n 上唯一的一个点的投影. 换句话说，以 P 为中心的中心射影，是添加了无穷远点之后的直线 n 和 n' 之间的一一对应，即是一个变换.

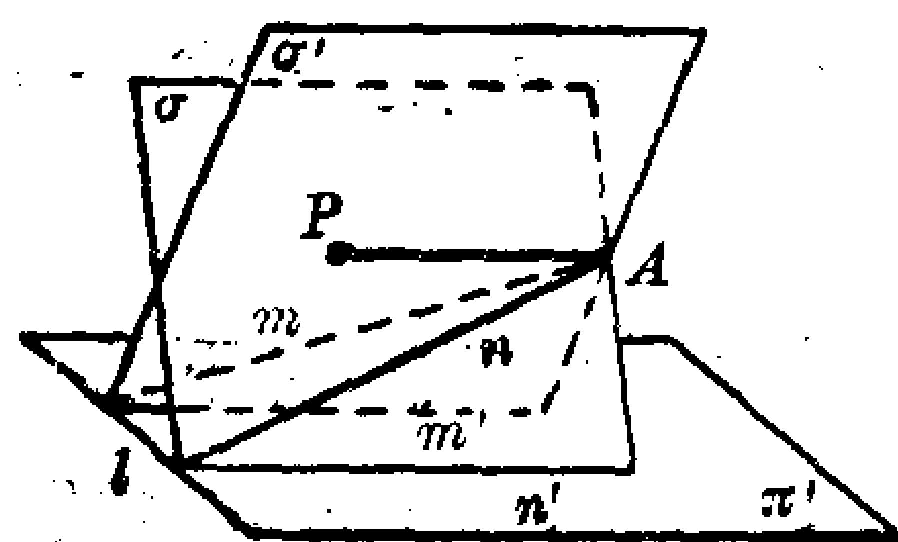


图 1-15

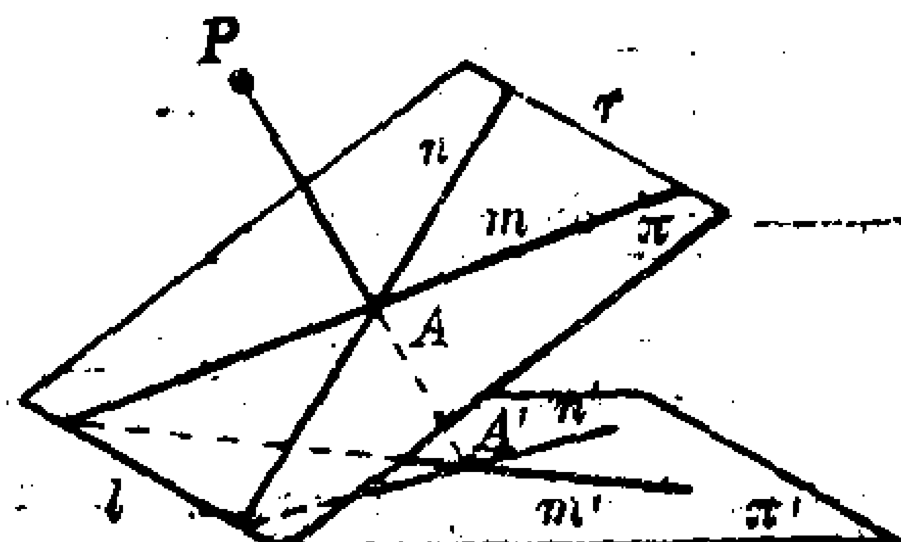


图 1-16

如果过直线 PA 作另一平面 σ'，与平面 π 和 π' 分别交于直线 m 和 m'（图 1-15），那末由太阳 P 发出的光线，把平面 σ 中的直线 m 投射为平面 σ' 中的直线 m'. 由于 PA 和平面 π' 平行，所以直线 m' 和 n' 均与 PA 平行，于是 $m' /\!/ n'$. 但是，直线 m' 和 n' 上的无穷远点是同一个点 A 的投影，所以直线 n' 和 m' 的无穷远点应当是同一个点. 换句话说，在平面 σ' 上彼此平行的直线应当添加一个公共的无穷远点.

另一方面，设直线 r 是过 P 且平行于 π' 的平面和平面 π 的交线，则恰好是直线 r 上的点均投射成平面 π' 中的无

穷远点．设 n' 和 m' 是平面 π' 中两条相交直线，交点为 A'．如果 n' 和 m' 分别是平面 π 中直线 n 和 m 的投影，而点 A' 是 π 中点 A 的投影，那末点 A 是直线 n 和 m 的交点．由于 A' 不是 π' 中的无穷远点，所以点 A 不在直线 r 上．于是两条不同的直线 n 和 m 不可能再与直线 r 交在同一个点上．换句话说，直线 n' 上的无穷远点和直线 m' 上的无穷远点应当是不同的，这就表明平面 π' 上任意两条相交直线所添加的无穷远点应当是不同的．最后，由于平面 π' 上的全部无穷远点恰好是平面 π 中直线 r 的投影，因此我们自然要把平面 π' 中全部无穷远点看成是形成一条直线——"无穷远直线"．

如上所述，我们把一个欧氏平面 π' 扩大成下面的样子：每条直线都添加一个无穷远点，彼此平行的直线要添加同一个公共的无穷远点，所有添加的无穷远点看成是一条无穷远直线．我们把这个扩大了的平面叫作是**射影平面**，仍表示为 π'．而添加了一个无穷远点的直线和那条无穷远直线，都叫作是**射影直线**．这个射影平面，就是本书中所要谈的平面射影几何的基本研究对象．

以上我们是考虑把平面 π 上的点 A 投影成平面 π' 上的点 A'．如果我们考虑将平面 π' 的点投射到平面 π 上，那末根据本节一开始关于中心投影的定义，点 A 应当是点 A' 的投影了．所以，平面 π 和平面 π' 的地位是一样的．如果把平面 π 象 π' 中那样用同样的方式也扩大成射影平面，不难想象，以 P 为中心的中心射影将射影平面 π 上每个点都

映成射影平面 π' 上的唯一的一个点；同时，射影平面 π' 上每个点都是射影平面 π 上唯一的一个点的投射．换句话说，中心射影是射影平面 π 到射影平面 π' 的一个变换．并且，不难看出，中心射影把射影平面 π 上的每条射影直线均变成射影平面 π' 上的一条射影直线．那么，一条弯曲的曲线会投射成什么样子呢？让我们举一些例子．

〔例 1〕 最简单的曲线当然是圆．设平面 π 上有一个圆 O，平面 π 的外面有一点 P，并且假定由 P 到平面 π 所作的垂线恰好通过圆 O 的圆心．于是在空间我们得到一个以 P 为顶以圆 O 为底的正圆锥面(见图 1-17)．现在我们用不过顶点 P 的另一个平面 π' 去截这个正圆锥面，则所得的截线 l 就是

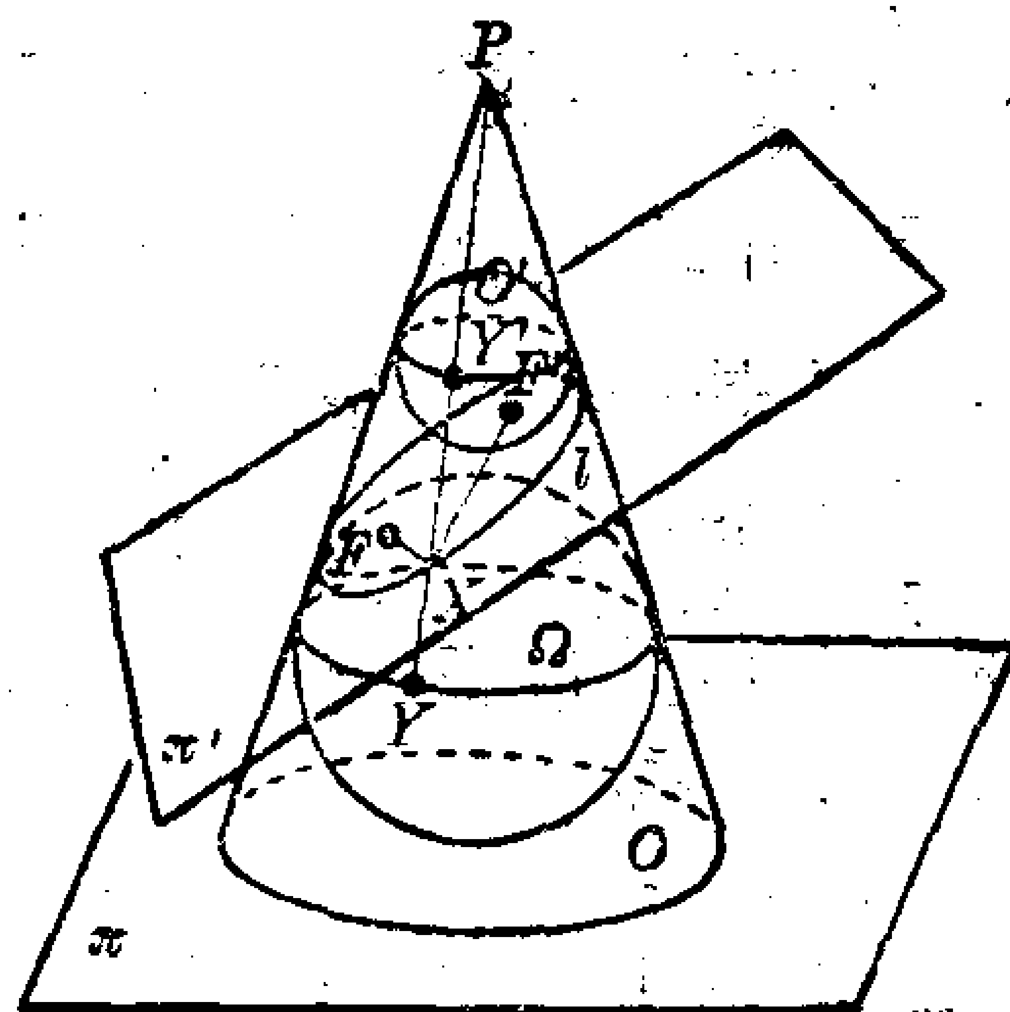


图 1-17

圆 O 在以 P 为中心的中心射影作用下的投影曲线．平面 π' 把上述正圆锥面截成两半．为了弄清 l 是一条什么样的曲线，让我们作一个球 Ω' 内切于上一半，再作一个球 Ω 内切于下一半．于是球 Ω' 于平面 π' 切于一点 F'，球 Ω 与平面 π' 切于点 F．现在取曲线 l 上任意一点 X，则直线 PX 同时与球 Ω 和 Ω' 相切．这是由于正圆锥的侧面与两个球相切，所以正圆锥的每条棱均与这两个球相切．特别地，直线 PX 与两个球相切．设 PX 与球 Ω 和 Ω' 的切点

分别为Y和Y'. 注意球Ω和球Ω'与正圆锥的切线均是与平面π平行的圆. 所以当点X在曲线l上变动时，点Y和Y'分别在这两个切圆上变动，但是YY'的长度是保持一定的.

现在我们连结XF和XF'. 由于平面π'与两个球也相切，而XF和XF'均在平面π'上，所以XF和XF'分别是球Ω和Ω'的切线. 于是XF和XY是点X对于球Ω的两条切线，F和Y是两个切点，因此$\overline{XF}=\overline{XY}$. 同样地，$\overline{XF'}=\overline{XY'}$. 于是$\overline{XF}+\overline{XF'}=\overline{XY}+\overline{XY'}=\overline{YY'}$. 但是，当$X$在曲线$l$上变化时，$YY'$的长度保持不变，所以曲线$l$是平面$\pi'$中距离两个定点$F$和$F'$的长度之和为常数的点的轨迹. 我们知道，这个轨迹(即曲线l)是一个椭圆. 所以，以P为中心的中心射影把圆O变成平面π'中的一个椭圆l.

当截平面π'愈来愈向上倾斜时，即平面π'和平面π的夹角愈来愈大时，所截出的椭圆l的形状则愈来愈扁(当平面π'与平面π平行时，l是一个不扁的椭圆，即是一个圆). 所以，利用中心射影，可以把圆投射成任何“扁度”的椭圆. 如果我们保持平面π'的倾度不变而上下移动，则截出的椭圆l具有同样的“扁度”，从而截出各种大小的彼此相似的椭圆. 这样一来，任何一个椭圆都可由圆O利用中心射影而得到. 或者换句话说(交换平面π和平面π'的地位)，任何一个椭圆都可利用一个适当的中心射影变成圆O. 于是，任意两个椭圆都可利用一个适当的中心射影把

其中的一个变成另一个.

〔例2〕 上一例表明，任意两个椭圆利用中心射影可以把其中的一个变成另一个. 事实上还不仅如此. 我们取平面 π'，使点 P 夹在平面 π 和 π' 之间(见图 1-18(ii)，则平面 π' 截出一条双曲线. 我们把证明留给读者. 和椭圆的情形一样，当平面 π' 以各种方式变动时，可以截出所有的双曲线来. 因此，利用中心射影，所有的双曲线都可变成圆，从而它们和所有椭圆都可以相互变换. 最后，平面 π' 还可以截出各种抛物线来(如图 1-18(iii)所示). 总起来，利用中心射影，我们可以把任意一条圆锥曲线变成任意一条圆锥曲线. 由此可见，中心投射相当灵活，具有很大的威力.

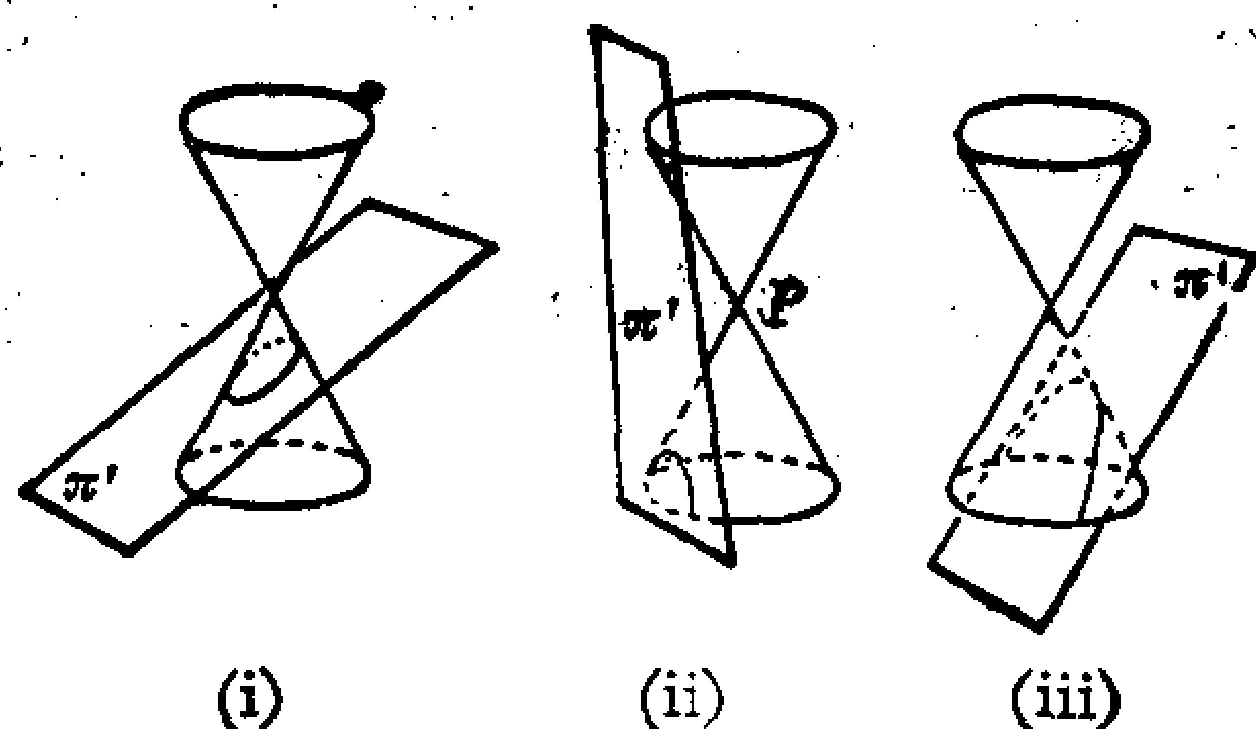


图 1-18

有的读者或许感到迷惑不解：椭圆是一条封闭曲线，而双曲线和抛物线都是"敞口"的，并且双曲线又有两个分支，它们怎么可能相互变换呢？有这样想法的人还是把这些圆锥曲线看成了通常欧氏平面中的几何图形. 他们忘记了我们是在谈射影几何，要把圆锥曲线看成是射影平面中的几何图形. 比如说，对于图 1-19 中所示的双曲线，直线 l 和

m是该双曲线的两条渐近线. 设 L_∞ 和 M_∞ 分别是直线 l 和 m 上的无穷远点. 由于直线 l 和 m 相交，所以 L_∞ 和 M_∞ 是两个不同的无穷远点，当渐近线无限延伸时，与两条渐近线愈来愈接近. 所以这条渐近线是经过无穷远点 M_∞ 和 L_∞ 的. 我们可以想象从点 L_∞ 出发，沿着双曲线的一个分支运动，一直走远到另一个无穷远点 M_∞（如图 1-19 中箭头所示），又从另一侧沿着双曲线的另一个分支回来，再走到 L_∞ 去. 所以双曲线在射影空间中也是一条封闭曲线. 同样地，图 1-19 所示的抛物线的两端无限延伸时，斜度愈来愈接近它的对称轴（即直线 n）的斜度. 所示两端都走到直线 n 上的无穷远点 N_∞. 于是抛物线也成为一条封闭的曲线. 所以，双曲线与无穷远直线交于两点 L_∞ 和 M_∞，即无穷远直线是双曲线的割线，而抛物线与无穷远直线只交于一点 N_∞，即无穷远直线是抛物线的切线. 最后，椭圆与无穷远直线不相交. 在射影平面中，这三类圆锥曲线的区别仅此而已.

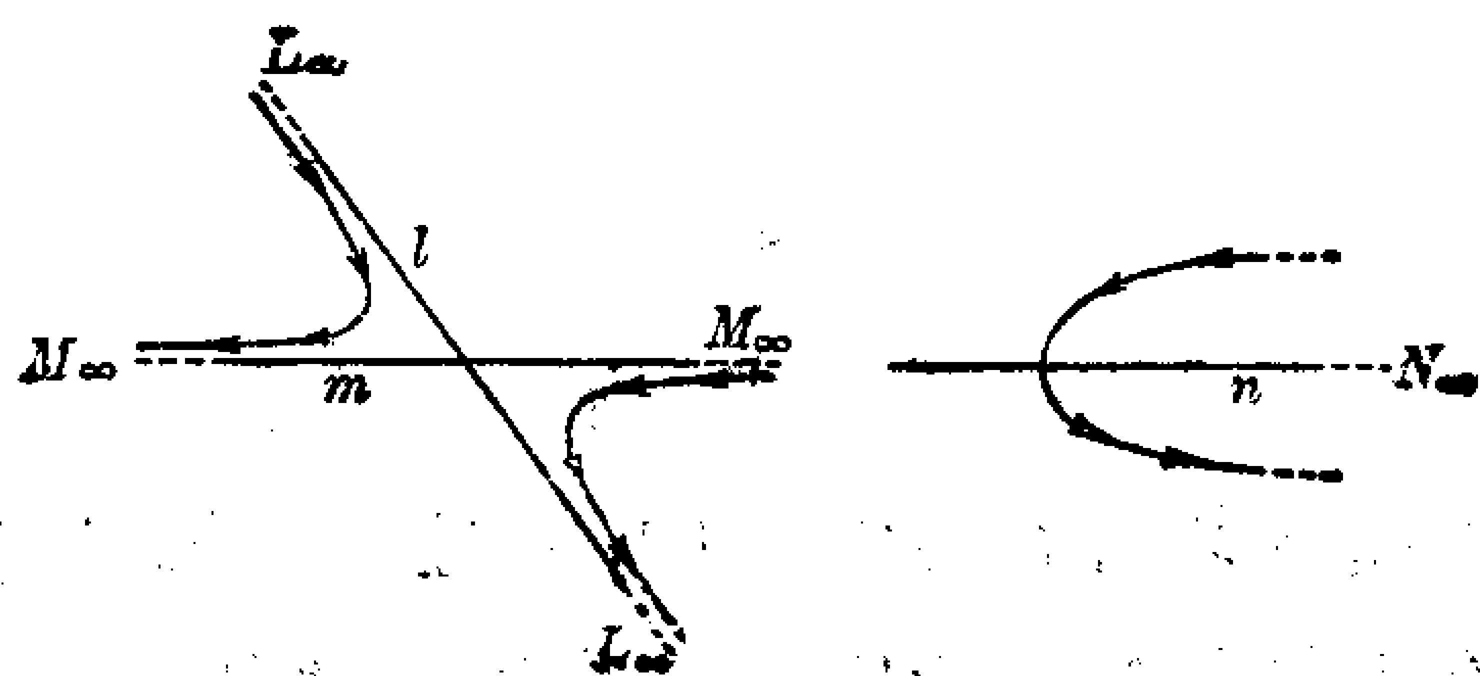


图 1-19

〔例 3〕 如果平面 π 和 π' 平行，或者采用射影几何的语言，如果平面 π 和 π' 相交于它们的无穷远直线. 不难证

明，从这两个平面之外的任意一点 P 作中心射影，一定把平面 π 中每个几何图形变成平面 π' 中一个与它相似的几何图形．当平面 π' 对 π 作平行移动时，可以投射出任意大小的相似图形．所以，利用中心射影，我们可以把任意两个相似的几何图形中的一个变成另一个．

为了今后叙述方便，现在我们引进一些术语．设 F 和 F' 是两个平面几何图形．如果通过有限次的中心射影变换可以把图形 F 变成图形 F'，那么"反其道而行之"，我们也可以通过有限次中心射影把 F' 变成 F．这时，我们就称图形 F 和 F' 是射影等价的．如果图形 F 和图形 F' 射影等价，而图形 F' 和 F'' 又射影等价，则图形 F 必然与 F'' 也射影等价(为什么?)．所以，几何图形分成许多射影等价类．在同一个射影等价类中的任意两个几何图形都是射影等价的，而不同等价类中的几何图形是不射影等价的，即不能通过有限次中心射影将其中一个图形变成另一个．

平面图形的射影等价分类，是平面射影几何的一个基本问题．换句话说，平面射影几何要弄清哪些图形彼此射影等价，哪些则不是．例如，由例 2 可知，所有的圆锥曲线都是彼此射影等价的．进而，由于平面在圆锥体上只能截出圆锥曲线来(这正是椭圆、双曲线和抛物线其所以统称作圆锥曲线的原因)，所以与圆射影等价的只能是圆锥曲线．于是全体圆锥曲线形成一个射影等价类．(注意：平面还可与圆锥体截出两条相交直线来，但是它不是圆的中心射影．)

〔例 4〕 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是任意两个三角形．

我们首先取 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 相似，并且 $A_1B_1=A'B'$。根据例3，可知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 是射影等价的。然后将 $A'B'$ 与 A_1B_1 这两条相等的边重合在一起，取相交于这条重边的任意两个不同的平面 π 和 π'，而把 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A'B'C'$ 分别放在平面 π 和 π' 上。连结 C_1C'，并在这条直线上取另外一点 P，则以 P 为中心的中心射影把点 C_1 变成点 C'，同时点 A' 和 B' 均保持不动。于是 $\triangle A_1B_1C_1$ 变成 $\triangle A'B'C'$，即 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A'B'C'$ 射影等价。所以，任意两个三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 都射影等价。另一方面，因为中心射影把直线变成直线，由此即知中心射影把三角形只能变成三角形，即三角形只能和三角形射影等价。于是，我们证明了：所有三角形组成一个射影等价类。由于三角形由三个顶点所完全决定，所以我们也可以说成：通过有限次（由以上所述可知只需两次）中心射影可以把平面上任意三个不共线的点变成另外三个不共线的点。又由于三角形也由它的三条边所完全决定，所以我们又可说成：通过有限次中心射影，可以把平面上任意三条不共点的射影直线变成另外三条不共点的射影直线。特别地，平面上的所有射影直线都是射影等价的。于是，所有的射影直线组成一个射影等价类。

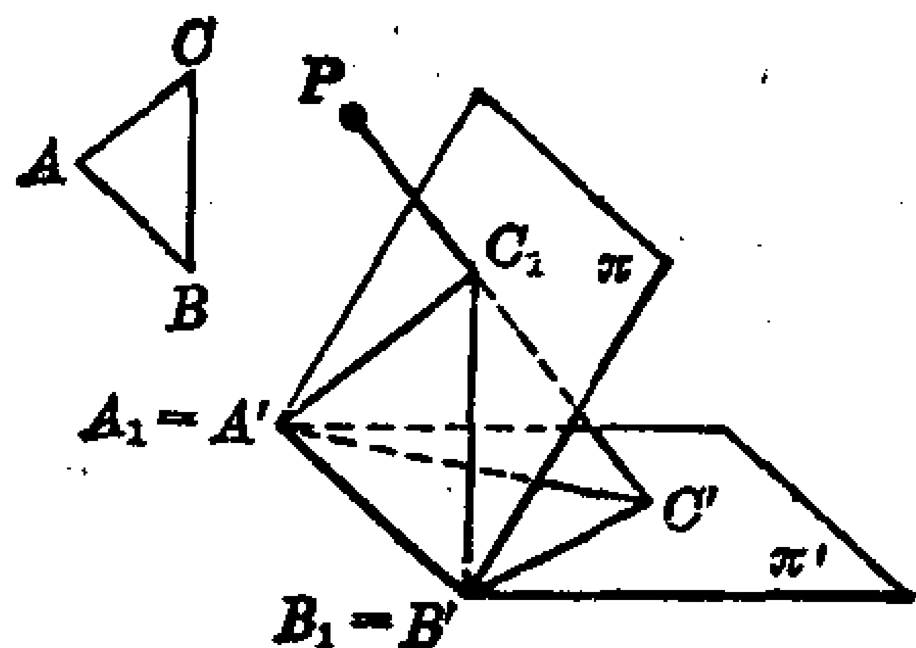


图 1-20

〔例5〕 现在把射影中心 P 移到离平面 π 和 π' 非常

远的地方去，即移到空间的一个无穷远点，则由 P 引出的射线是空间中的一些平行线．就好象太阳离我们非常之远，可以把阳光看成是平行光束洒在地球上一样．设 A 是平面 π 中的一个无穷远点．由于 P 也是无穷远点，所以直线 PA 是空间的一条无穷远直线．于是直线 PA 上的每个点都是空间的无穷远点．特别地，点 A 在平面 π' 上的投影点 A' 是无穷远点．换句话说，以无穷远点为中心的中心射影把平面 π 的无穷远点变成平面 π' 的无穷远点，从而把平面 π 的无穷远直线变成平面 π' 的无穷远直线．因此，对于平面 π 上任意两条平行直线 m 和 n，它们交于无穷远点 A，则这两条平行线在平面 π' 中的投影 m' 和 n' 交于无穷远点 A'，即直线 m' 和 n' 也是平行的．所以，以无穷远点为中心的中心射影把平行直线变成平行直线．这件事用立体几何也可以直接证明，我们留给大家作为习题．

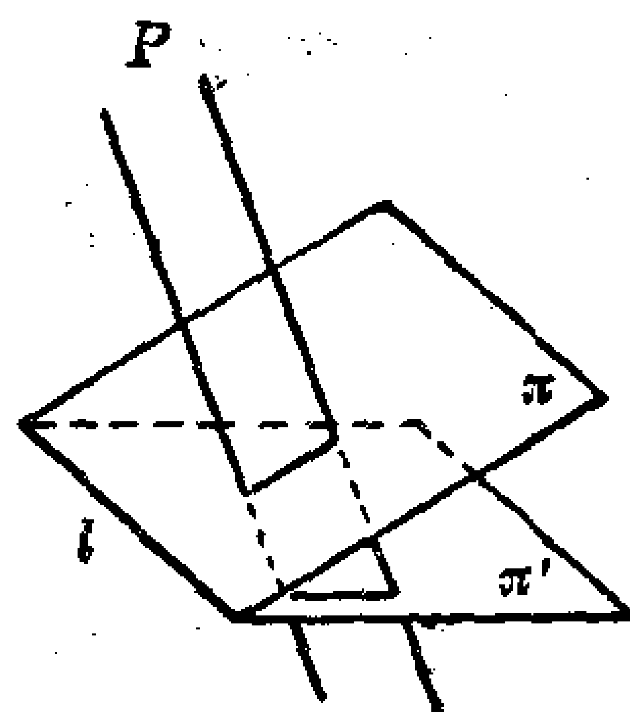


图 1-21

现在设从无穷远点 P 投向平面 π 的射线均与平面 π 垂直．这时，对于平面 π 上的一个圆 O，它与 P 到圆周各点的平行射线围成一个直圆柱体．用任意一个平面 π' 截此直圆柱，其截面都是椭圆．这可以象例 1 那样类似地证

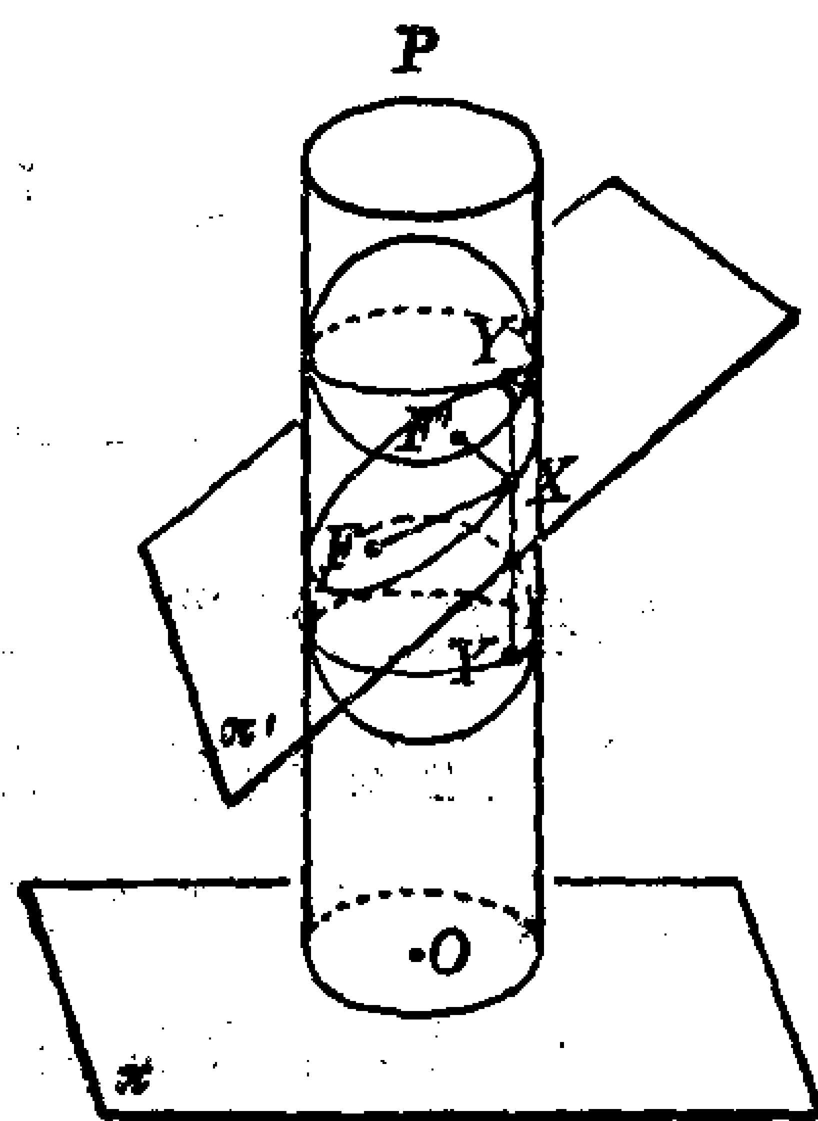


图 1-22

明(参见图 1-22). 改变平面 π' 的倾斜度. 可以得到任意形状的椭圆, 因此, 利用中心为无穷远点的中心射影, 我们把任意一个椭圆变成圆.

练习题 (二)

1. 利用立体几何, 直接证明: 以无穷远点为中心的中心射影将平行直线变成平行直线.

2. 证明: 以无穷远点为中心的中心射影, 可以把任意双曲线变成任意双曲线, 把任意抛物线变成任意抛物线; 但是不能把椭圆, 双曲线和抛物线中的一个变成另一个.

3. 证明用图 1-18 的(ii)和(iii)所示的平面 π' 去截正圆锥, 所得截线分别是双曲线和抛物线.

4. 设 F、F'、F'' 是射影平面上三个几何图形, 如果 F 和 F' 射影等价, F' 和 F'' 射影等价, 则 F 和 F'' 也射影等价.

4. 用射影几何解题

——帕斯卡定理的第三个证明

现在我们利用中心射影给出帕斯卡定理的第三个证明. 我们还要利用中心射影证明平面几何中另一些美妙的定理. 其中包括著名的德沙格定理和帕普斯定理. 在此之前, 我们需要讲述射影几何中的另一个重要概念.

我们从上一节可以看出, 中心射影可以把一个平面图

形变成与它形状完全不同的另一个几何图形．但是，我们总不能利用有限次中心射影把任意两个几何图形变来变去．例如一条直线就不能变成一个圆．这说明，中心射影总要保持平面图形的某些性质．我们在上一节例4中看到，任意两个三角形都是射影等价的．特别地，中心射影可以把任意一个线段变成另一个线段．所以中心射影可以改变线段的长度．同样可知，中心射影可以改变两条直线的夹角，也可以改变三角形的面积．所以，长度、角度、面积，这些欧氏几何中性质在中心射影之下是可以改变的．但是，中心射影一定把射影直线变成射影直线．如果点A是三条射影直线l、m和n的交点，某个中心射影把这三条射影直线分别变成l'、m'和n'，把点A变成点A'，则点A'同时在l'、m'和n'上．所以，中心射影把交于一点的三条射影直线变成交于一点的三条射影直线．类似地，中心射影必然把在一条射影直线上的三个点变成在另一条射影直线上的三个点．因此："三线共点"和"三点共线"这两个性质在中心射影之下是保持不变的．

一般地，设S是平面几何图形的某个性质，如果中心射影将此性质S保持不变，我们就称S为射影不变性．如果一个几何量R在中心射影下保持不变，我们称R为射影不变量．例如，"三点共线"和"三线共点"均是射影不变性．而"两直线垂直"不是射影不变性，这是因为两直线垂直相当于说夹角为90°，但是"角度"不是射影不变量．同样地，"长度"、"面积"也都不是射影不变量（我们至今还没有一个

象样的射影不变量，这留在下一章再讨论）. 又比如，平面上两个几何图形相切，意味着它们恰有一个交点，这显然是射影不变性. 所以“两图形相切”是射影不变性.

现在我们以射影几何的眼光看一看帕斯卡定理. 第1节中的帕斯卡定理是关于圆内接六边形的性质，但是这些性质没有涉及到长度、角度、面积等概念，而只涉及到直线、直线的交点、三点共线这样一些性质，这些都是射影不变性. 所以，帕斯卡定理若对于圆成立，那么对于任意一个和圆射影等价的曲线，即任意一个圆锥曲线也应当成立（注意：我们在上节例2中说过，在射影平面中，每条圆锥曲线都是一条封闭曲线，所以均可以作内接六边形）. 因此帕斯卡定理现在可以写成下面的样子：

帕斯卡定理 设 $ABCDEF$ 是某圆锥曲线 l 的内接六边形. AB 和 DE 交于点 X, BC 和 EF 交于点 Y, CD 和 AF 交于点 Z，则 X、Y、Z 在一条（射影）直线上.

证明 有了以上种种准备，现在证明帕斯卡定理就非常简单了. 由于定理中叙述的均是射影不变性质，所以允许我们作中心射影变换. 因此，我们不妨假定定理中的圆锥曲线 l 就是一个圆，因为任意圆锥曲线均射影等价于圆. 设圆 l 在平面 π 上. 在平面 π 外取一点 P，则点 P 到圆 l 的射线围成一个圆锥. 由于 X、Y 均在圆 l 的外部，我们总可以找到一个平面 π'，使此平面 π'

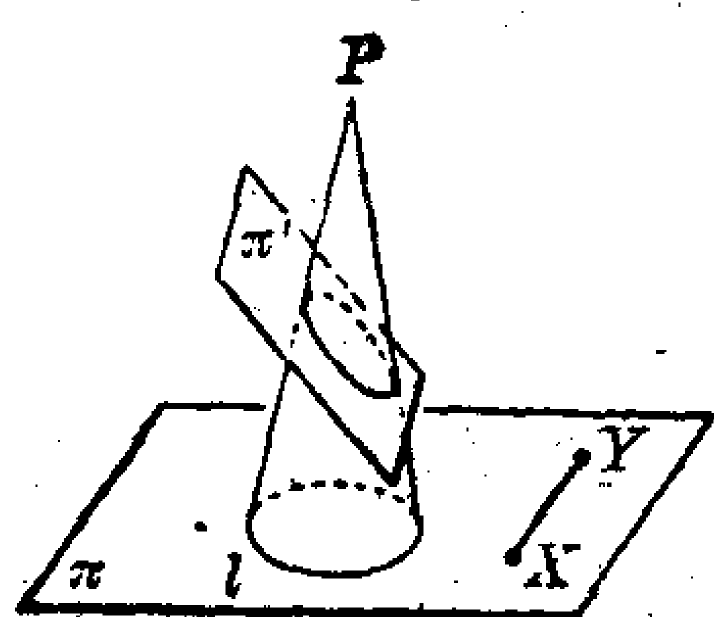


图 1-23

平行于由点 P、X、Y 所决定的平面，并且平面 π' 在圆锥上截出一个椭圆 l'(参见图 1-23). 这时，射线 PX 和 PY 均平行于平面 π'. 从而以 P 为中心的中心射影把 X 和 Y 变成平面 π' 中的无穷远点 X' 和 Y'，于是直线 XY 变成平面 π' 中的无穷远直线. 圆 l 变成椭圆 l'. 圆 l 的内接六边形 $ABCDEF$ 变成椭圆 l' 的内接六边形 $A'B'C'D'E'F'$. $A'B'$ 和 $D'E'$ 交于无穷远点 X'，从而 $A'B' /\!/ D'E'$. 同样地，$B'C' /\!/ E'F'$. 设点 Z 变成平面 π' 中的点 Z'. 那末，为了证明 Z 和 X、Y 共线，即证明 Z 在直线 XY 上，我们只要证明 Z' 在无穷远直线 $X'Y'$ 上即可，换句话说，我们只需证明 Z' 也是无穷远点. 而这又相当于说证明 $C'D' /\!/ A'F'$. 于是，我们只需证明下面的定理：

定理 设 $ABCDEF$ 是椭圆 l 的内接六边形，如果 $AB /\!/ DE$、$BC /\!/ EF$，则 $CD /\!/ AF$.

证明椭圆的这个性质仍然不是件容易的事情. 但是幸好我们在上一节例 5 中讲述了以无穷远点为中心的中心射影，它可把任意椭圆变成一个圆，并且保持直线的平行性. 所以我们只需对 l 是圆的情形证明上述定理就可以了. 而这是中学生可以作的，因为(参见图 1-24). 由 $AB /\!/ DE$ 可知 $\angle\alpha_1=\angle\alpha_2$. 由 $BC /\!/ EF$ 可知 $\angle\beta_1=\angle\beta_2$. 再由圆内接四边形的性质，可知 $\angle\alpha_2+\angle\beta_2+\angle y$ 和 $\angle\alpha_1+\angle\beta_1+\angle x$ 均是 $180°$. 由于 $\angle\alpha_2+\angle\beta_2=\angle\alpha_1+\angle\beta_1$，从而 $\angle x=\angle y$，于是 $CD /\!/ AF$. 这就证明了上述定理. 从而也就完成了关于圆锥曲线的帕斯卡定理的证明.

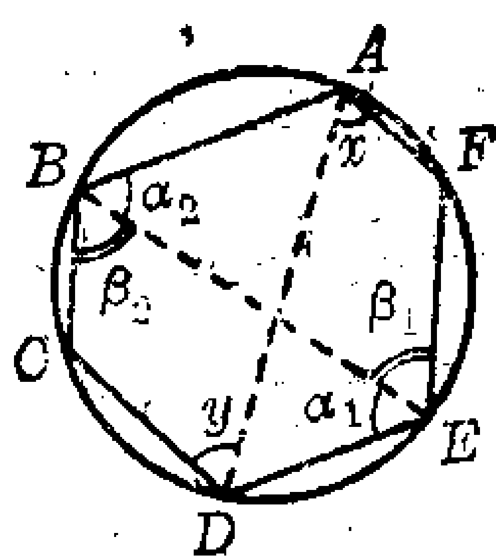


图 1-24

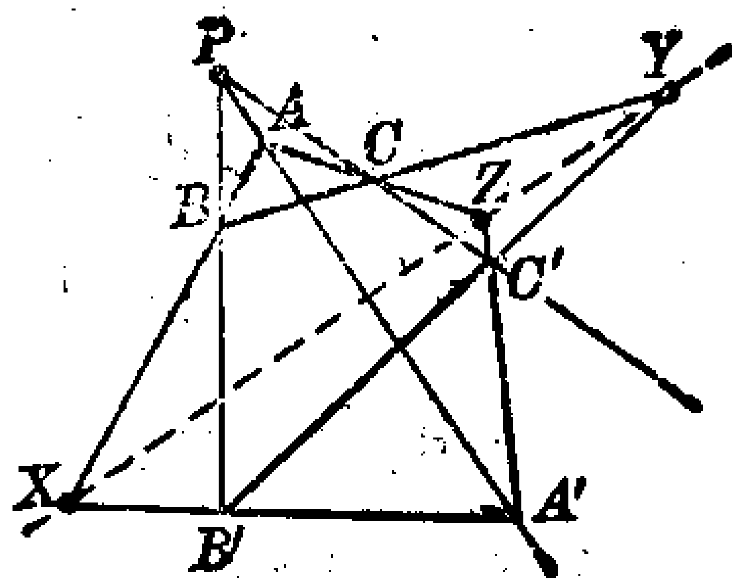


图 1-25

现在我们采用同样的办法再证明一些优美的定理. 1639年,德沙格给出下面一个重要定理.

德沙格定理 设$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的对应顶点连线AA'、BB'和CC'交于一点,则三组对应边的交点在一条直线上.

证明 设AB和$A'B'$交于X, BC和$B'C'$交于Y, CA和$C'A'$交于Z, 我们要证X、Y、Z三点共线(见图1-25). 由于定理中所涉及的都是射影不变性,所以我们不妨设直线XY是无穷远直线.于是$AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$. 为了证明Z在无穷远直线XY上, 只需证$CA \parallel C'A'$. 而这是很容易的(见图1-26). 由$AB \parallel A'B'$可知

$$\frac{PA}{PA'}=\frac{PB}{PB'}.$$

由$BC \parallel B'C'$可知

$$\frac{PB}{PB'}=\frac{PC}{PC'}.$$

于是

$$\frac{PA}{PA'}=\frac{PC}{PC'}.$$

从而$AC \parallel A'C'$. 这就证明了德沙格定理.

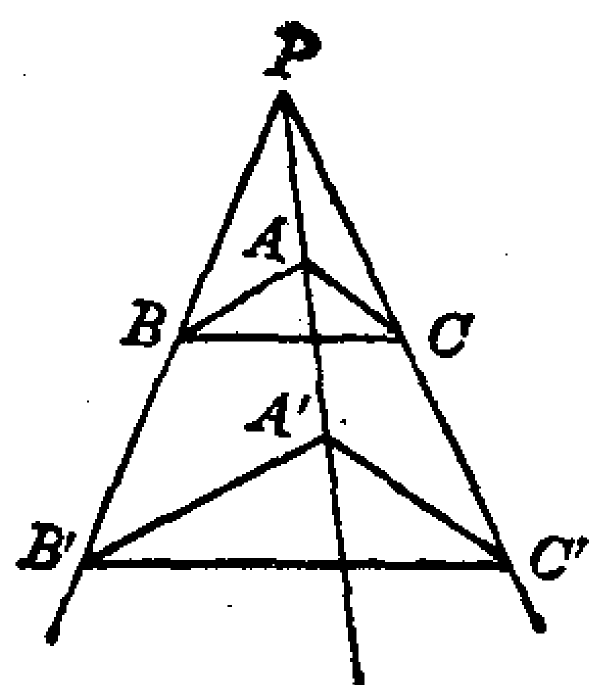


图 1-26

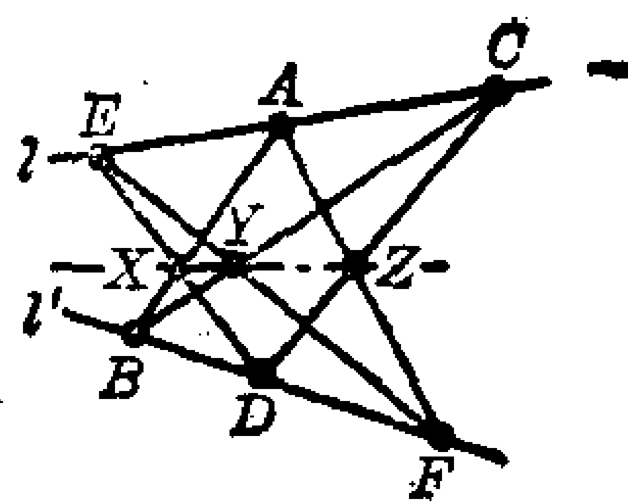


图 1-27

下一个定理是公元前 300 年希腊数学家帕普斯(Pappus)发现的.

帕普斯定理 设同一平面上有两条不同的直线 l 和 l'. A、E 和 C 是直线 l 上三点，B、D、F 是直线 l' 上的三点. 如果直线 AB 和 ED 交于 X, EF 和 BC 交于 Y, AF 和 CD 交于 Z, 则 X、Y、Z 三点在一条直线上(图 1-27).

证明 帕普斯定理只涉及射影不变性质，所以我们可设 XY 是无穷远直线. 于是 $AB /\!/ ED$, $BC /\!/ FE$. 为了证明 Z 也在无穷远直线 XY 上, 只需证 $CD /\!/ AF$, 而这是很容易的(见图 1-28). 由 $AB /\!/ ED$ 和 $BC /\!/ FE$ 可知

$$\frac{a}{b}=\frac{e}{d}, \qquad \frac{b}{c}=\frac{f}{e},$$

于是

$$\frac{a}{c}=\frac{f}{d},$$

从而 $CD /\!/ AF$. 这就证明了帕普斯定理.

下面是德沙格定理的逆定理, 它可以类似地证明, 留给读者作为习题.

德沙格定理的逆定理 两个三角形三组对应边的三个交点在一条直线上, 则三组对应顶点的连线交于一点.

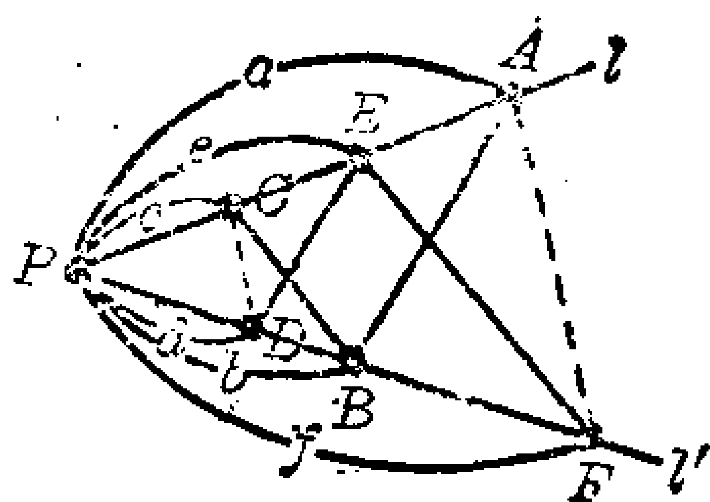


图 1-28

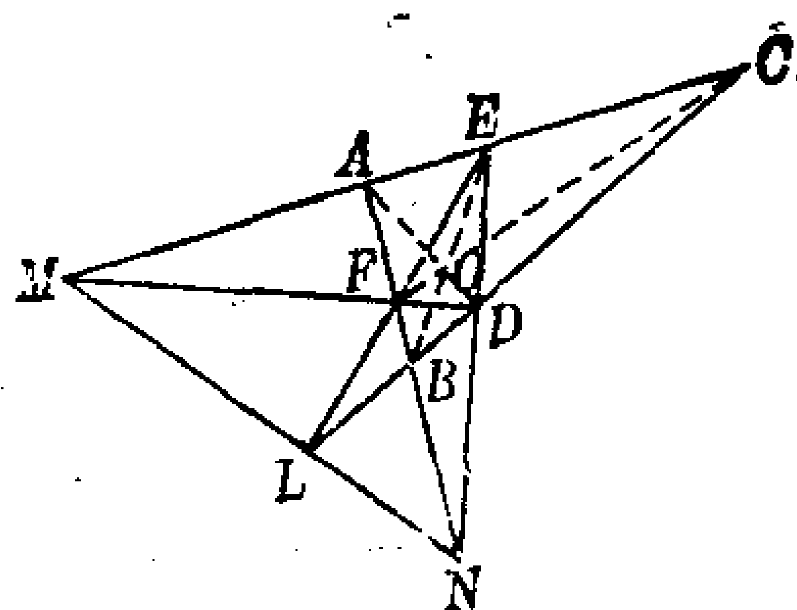


图 1-29

现在我们用上述诸定理解决几个几何问题.

〔例 1〕 $\triangle ABC$ 的三个内角平分线交对边于 D, E, F（图 1-29）. 设 BC 和 EF 交于 L, CA 和 FD 交于 M, AB 和 DE 交于 N, 试证 L、M、N 共线.

证明 假定 $\triangle ABC$ 的三条角平分线交于点 O（即 $\triangle ABC$ 的内心），则 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的对应顶点连线共点于 O. 根据德沙格定理即知它们的对应边的交点 L、M、N 共线. 证毕.

注意上面证明中只用到三个角平分线交于一点（内心）这条性质，所以如果例 1 的角平分线改成高线或中线，则结论仍旧正确，因为三个高线交于一点（垂心），三个中线也共点（重心），或者更一般地，只要 AD、BE、CF 共点，则命题就成立.

〔例 2〕 设 $ABCD$ 是一个四边形. X 是 BC 上一点. 过 X 作一直线与 AB、AC 分别交于点 P、Q. 过 X 作另一直线与 DB、DC 分别交于点 R、S. 试证 PR、QS、AD 三线共点.

证明 考虑 $\triangle PQA$ 和 $\triangle RSD$. 它们的对应边 PQ 和

RS 交于 X，QA 和 SD 交于 C，AP 和 DR 交于 B. 由假设 X、B、C 共线，所以由德沙格定理的逆定理可知对应顶点连线 PR、QS、AD 共点.

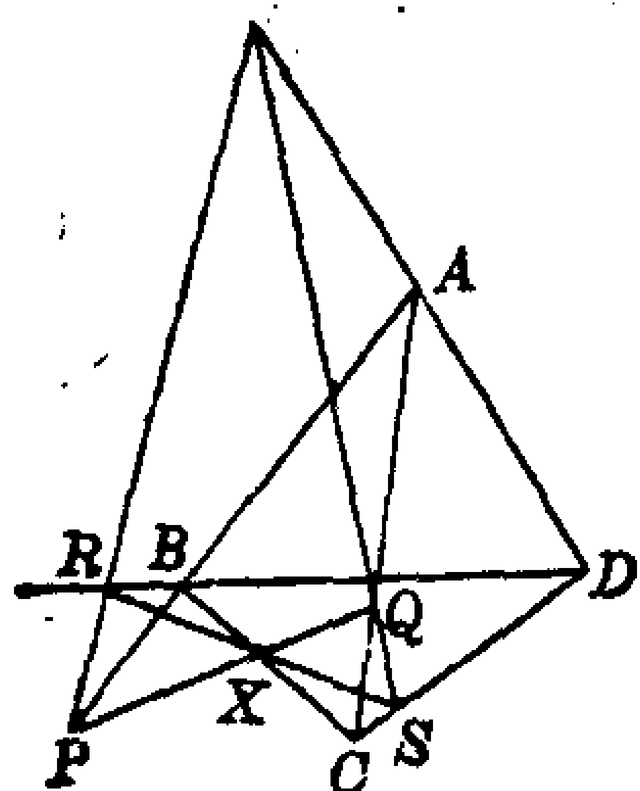


图 1-30

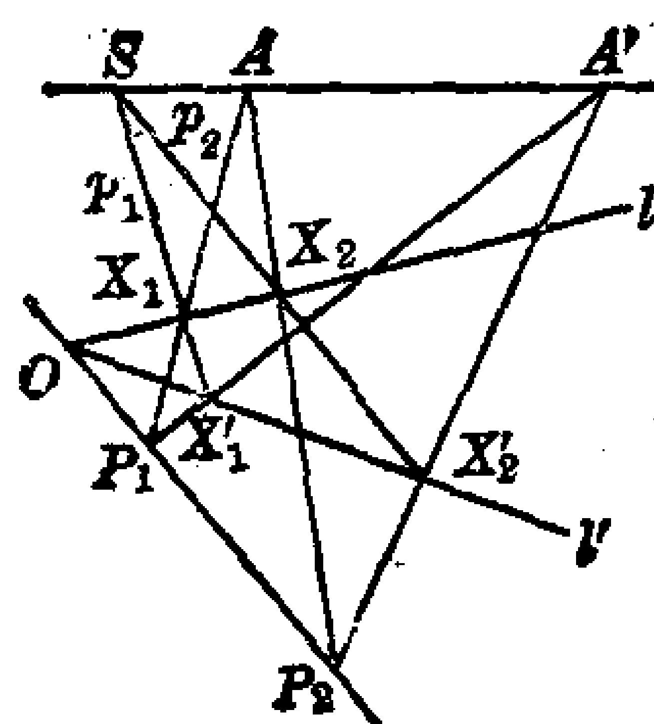


图 1-31

〔例 3〕 设 l 和 l' 是两条给定的直线，S、A、A' 是给定的三个共线点. 过点 S 作动直线 p，与 l 和 l' 分别交于 X 和 X'，则 XA 和 $X'A'$ 的交点 P 的轨迹是过 l 和 l' 的交点 O 的一条直线.

证明 如图 1-31 所示. 过 S 作直线 p_1，分别与 l 和 l' 交于 X_1 和 X_1'. AX_1 和 $A'X_1'$ 交于点 P_1. 然后，过 S 任作一动直线 p_2，分别与 l 和 l' 交于 X_2 和 X_2'，AX_2 和 $A'X_2'$ 交于点 P_2. 我们只需证明 O、P_1、P_2 共线（从而点 P_2 的轨迹是过定点 O 和 P_1 的直线）. 为此，考虑 $\triangle AX_1X_2$ 和 $\triangle A'X_1'X_2'$. 由于 AA'、X_1X_1'、X_2X_2' 共点于 S，根据德沙格定理，即知 O、P_1、P_2 共线. 证毕.

〔例 4〕 设 α_1，α_2，…，α_n 是交于一点 O 的 n 条直线 ($n \geqslant 3$). n 边形 $A_1A_2 \cdots A_n$ 的 n 个顶点 A_1，…，A_n 分别在直线 α_1，…，α_n 上移动. 如果 $n-1$ 条边 A_1A_2，A_2A_3，…，

$A_{n-1}A_n$ 分别通过定点 $P_1, \cdots, P_{n-1}$，那末第 n 边 A_nA_1 也通过一个定点.

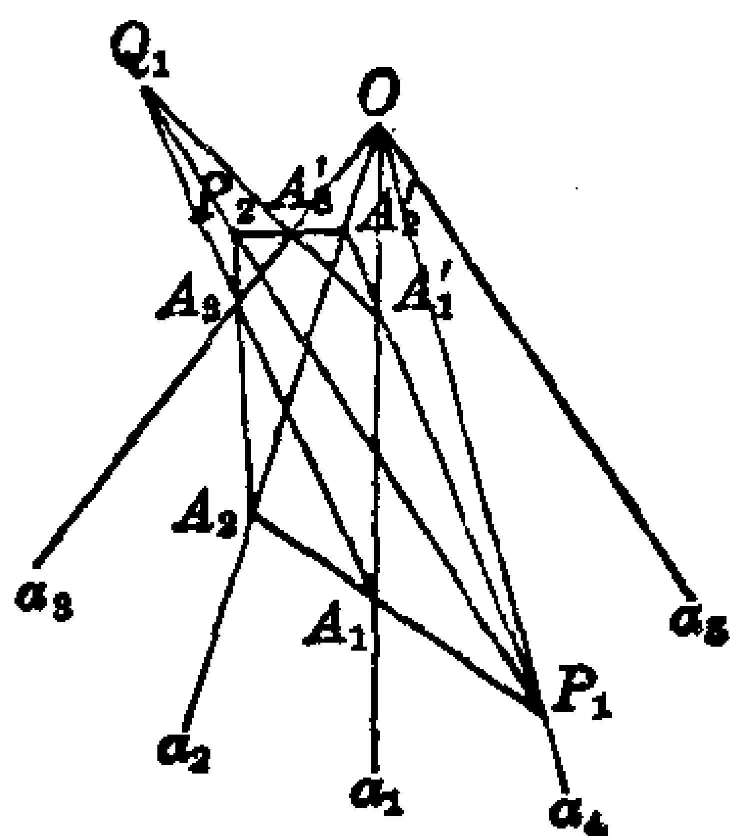


图 1-32

证明 我们固定一个 n 边形 $A_1\cdots A_n$ 满足上述性质(图 1-32). 设 n 边形 $A_1'A_2'\cdots A_n'$ 也满足上述性质. 考虑 $\triangle A_1A_2A_3$ 和 $\triangle A_1'A_2'A_3'$. 由于直线 A_iA_i' 就是直线 a_i (这里 $i=1, 2, 3$)，从而它们共点于 O. 由德沙格定理可知对应边交点 P_1、P_2、Q_1 共线，于是 $A_1'A_3'$ 过 A_1A_3 和 P_1P_2 的交点 Q_1，这是一个定点. 再考虑 $\triangle A_1A_3A_4$ 和 $\triangle A_1'A_3'A_4'$. 它们对应顶点连线也共点于 O，所以 A_1A_3 和 $A_1'A_3'$ 的交点 Q_1，A_3A_4 和 $A_3'A_4'$ 的交点 P_3，以及 A_1A_4 和 $A_1'A_4'$ 的交点 Q_2 在一条直线上. 于是 $A_1'A_4'$ 过 Q_1P_3 和 A_1A_4 的交点 Q_2，这又是一个定点. 继续下去，便知 A_nA_1 过一个定点. 证毕.

练习题（三）

1. 设 α、β、γ 是共点的三条给定的直线. $\triangle ABC$ 的三个顶点 A、B、C 分别在直线 α、β、γ 上移动，并且保持 AB 和 BC 分别通过定点 P 和 Q，证明 CA 也通过一个定点.

2. $\triangle ABC$ 的两个顶点 A 和 B 分别在直线 α 和 β 上移动，并且使三边 AB、BC 和 CA 分别通过共线的三个定点 P、Q、R. 求证顶点 C 的轨迹是一条直线.

3. 四边形 $ABCD$ 的四边 AB、BC、CD、DA 上分别有

点 E、F、G、H. 如果直线 BD、EH、FG 共点，求证 AC、EF、HG 也共点.

4. 设 $PQRS$ 为四边形. 对角线 PQ 和 SR 交于 C，对边 SP 和 QR 的延长线交于 A，对边 PR 和 SQ 的延长线交于 B. 如果直线 AC 和 PR 交于 B_1，AQ 和 BC 交于 A_1，AB 和 PQ 交于 C_1. 求证 A_1、B_1、C_1 共线.

5. 已知两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$. 如果 AA'、BB'、CC' 交于一点，AB'、BC'、CA' 交于一点. 求证 AC'、BA'、CB' 也交于一点.

6. 设 a、b、c、d 是四条直线. 如果事先无法作出 a 与 b 的交点 P 以及 c 与 d 的交点 Q，如何只用直尺作出一直线通过点 P 和 Q?

7. 设 $PQRS$ 为四边形. 对边 PS 与 QR 交于 A，对边 PQ 与 RS 交于 B. 二对角线 QS 与 PR 交于 B. 再设 BC 与 QR 交于 A_1，CA 与 RP 交于 B_1，AB 与 PQ 交于 C_1. 求证 A_1，B_1，C_1 共线.

8. 证明德沙格定理的逆定理.

二、平面射影几何

我们在上一章通过一个实例引伸出平面射影几何的最基本概念，这门学问的舞台是射影平面．人物是射影平面中的几何图形，导演是中心射影，主要情节有两个：一个是弄清哪些几何图形是射影等价的；另一个是弄清几何图形有哪些射影不变性和射影不变量．这一章我们着手展开平面射影几何这场戏．让大家欣赏戏中一些精彩的片断．我们在开场白中已经说过，这场戏的作者是法国数学家彭色列，并且剧本是他在俄国监狱里写成的．

在拿破仑时代，创办了一所学校——法国高等技术学校(École Polytechnigue)．当时法国著名的数学家几乎都出身于这个学校．例如，画法几何的创造人蒙日(G. Monge, 1746～1818)就是这个学校的创始人之一，也是该校行政和学术上的核心人物．为了筑城等需要，蒙日承担了许多建筑项目的设计工作，不但作了大量的计算，而且要把各种建筑的形状和尺寸科学地画在图纸上，他总结了自己多年的经验，1795年写成了《画法几何学》．

彭色列是蒙日的学生. 1812年，他参加了尼尔将军统率的拿破仑军队进军莫斯科，在克拉斯诺镇被俄军俘虏. 经过五个月的忍饥受冻和爬山越野，于1813年3月被关进伏尔加河畔萨拉托夫监狱，在那里，他复习蒙日教过的几何学知识，并讲给难友们听. 1814年他回到巴黎时，带回了他在监狱中写成的厚厚的七册讲义. 这份讲义于1822年以"关于图形的射影性质"(Traité des Propriétés Projectives des Figures)为书名出版. 系统地叙述了中心射影，连续原理，复比理论和对偶原理等. 从此，射影几何作为一个数学分支，展现在人们的面前. 后来，彭色列作过短时间的大学力学教授，也当过颇有能力的行政官员，但大部分时间是从事军人生涯. 他得到过种种荣誉，在繁忙而多彩多姿的社会和学术活动中度过了一生.



彭色列 (J. V. Poncelet, 1788～1867)

现在，让我们一起欣赏彭色列等人所发展的平面射影几何的几个精彩的片断.

1. "此时无穷胜有穷"

——再谈射影平面

前已指出，为了使中心射影是一一对应(即是一个变

换)，我们在通常的欧氏平面中添加了一条无穷远直线，从而将欧氏平面扩大成射影平面(参见本书第18页)．事实上，引进无穷远点和无穷远直线的好处还不仅于此．比如说，引进无穷远点之后，我们把椭圆、双曲线和抛物线这三种在欧氏几何中形状很不相同的曲线变成了一样的曲线：它们都是一条封闭曲线(参见本书第21页例2中所述)．又比如说，在欧氏平面中，两条不同的直线有两种可能性：相交和平行．但在射影平面中，下面定理表明两条射影直线的关系只有一种可能性．

定理1 射影平面上任意两条不同的射影直线均恰好交于一点．

证明 假如这两条射影直线当中一条是无穷远直线，那末另一条便是普通直线加上一个无穷远点．于是这两条射影直线便只交在这个无穷远点．假如两条射影直线都不是无穷远直线，那末它们就是两条不同的普通直线再加上各自的无穷远点．如果这两条普通直线相交(于一点)，则它们的无穷远点是不同的．因此作为射影直线它们也只交于一点．如果这两条普通直线平行，则它们具有同一个无穷远点．所以作为射影直线，它们只交于公共的无穷远点．证毕．

完全类似的，我们有：

定理1′ 射影平面上任意两个不同的点都恰好在一条射影直线上．

证明 如果这两点 A 和 B 都是无穷远点，则它们都在

无穷远直线上．并且这两个无穷远点不可能同在其他射影直线上，因为其他射影直线都只有一个无穷远点．

如果 A 是无穷远点而 B 不是，则 A 一定是某条普通直线 l 所增加的无穷远点．今后我们把普通直线 l 加上无穷远点 A 所得到的射影直线仍表成 l，叫作"射影直线 l"．如果 B 在普通直线 l 上，则 A 和 B 均在射影直线 l 上．如果 B 不在普通直线 l 上，在欧氏平面中，过 B 可作唯一的一条普通直线 m 与 l 平行．于是无穷远点 A 也在射影直线 m 上，即 A 和 B 均在射影直线 m 上．总之，我们总可以找到过 A 和 B 的一条射影直线．进而，不可能有两条射影直线均过 A 和 B，因为若过 A 和 B 可以引出两条射影直线，则如上所述，它们都不是无穷远直线，所以都是普通直线添加一个无穷远点．于是这个无穷远点一定是 A，由于它们有公共的无穷远点，所以这两条普通直线一定平行，但是它们又应当交于非无穷远点 B，这显然是不可能的．

最后，设 A 和 B 均不是无穷远点，则恰有一条普通直线过 A 和 B，将这条普通直线添加上无穷远点之后，它便是唯一的一条过 A 和 B 的射影直线．证毕．

以上两个定理还有更简单的证明方法：由于"两条射影直线交于多少点"和"过两点可引多少条射影直线"显然都是射影不变性．所以在定理 1 中，无妨设两条直线当中的一条是无穷远直线．因此我们只需对两条射影直线中的一条是无穷远直线的情况证明定理 1 即可．同样地，在定理 1′ 中，只需对点 A 和 B 都是无穷远点的情形证明即可，因

为利用中心射影可以把任意两个点同时变成无穷远点.

由于射影平面中两条不同射影直线只有一种关系(相交于一点),从而可以把许多定理叙述得更为简洁. 例如对于本书第6页的预备定理2, 在此定理的叙述中我们可以去掉“如果直线 AA'、BB'、CC' 两两相交”这样一句话. 因为若 AA' 和 CC' 平行,则 $ACC'A'$ 是平行四边形,于是 $AC=A'C'$, 从而两个相似三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 是全等的. 由于它们的对应边又平行, 从而 BB' 也与 AA' 和 CC' 平行, 即这三条直线仍然交于一点——交于它们公共的无穷远点. 又比如第2节中的预备定理4, 我们也不必要求三个圆是大小不等的. 因为若三个圆大小相等, 则任意两个圆的两条公切线均平行, 从而交于无穷远点, 而三个无穷远点 X、Y、Z 当然在一条(无穷远)直线上. 如果圆 O_1 和圆 O_2 相等但不等于圆 O_3, 则不难证明圆 O_1 和圆 O_2 的两条平行的公切线必平行于直线 YZ(证明留给读者). 从而 X 在射影直线 YZ 上. 即 X、Y、Z 仍然是在一条(射影)直线上. 这样的例子还可以举很多.

现在我们介绍射影几何的另一条性质: 连续性质. 确切地说, 这是射影几何的一条公理(彭色列称之为连续原理),但是我们宁愿用一些例子形象地叙述这条公理.

〔例1〕 让我们再审查一下第一章中的帕斯卡定理. 这个定理是说: 如果 $ABCDEF$ 是一条圆锥曲线上的内接六边形. 对边 AB 和 DE 交于 X, BC 和 EF 交于 Y, CD 和 AF 交于 Z,则 X、Y、Z 共线. 如果我们把点 A 沿着圆

锥曲线连续地移到邻点 B，则直线 AB 就变成圆锥曲线在点 B 的切线。于是我们就得到如下定理：

定理 A 设 $BCDEF$ 是圆锥曲线的内接五边形。过 B 作该圆锥曲线的切线与 DE 交于 X，CB 与 EF 交于 Y，CD 与 FB 交于 Z，则 X、Y、Z 共线(图 2-1)。

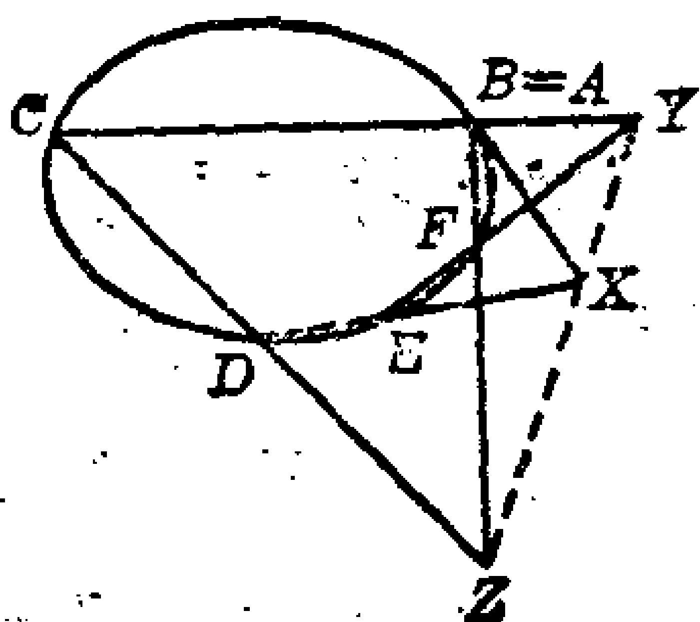


图 2-1

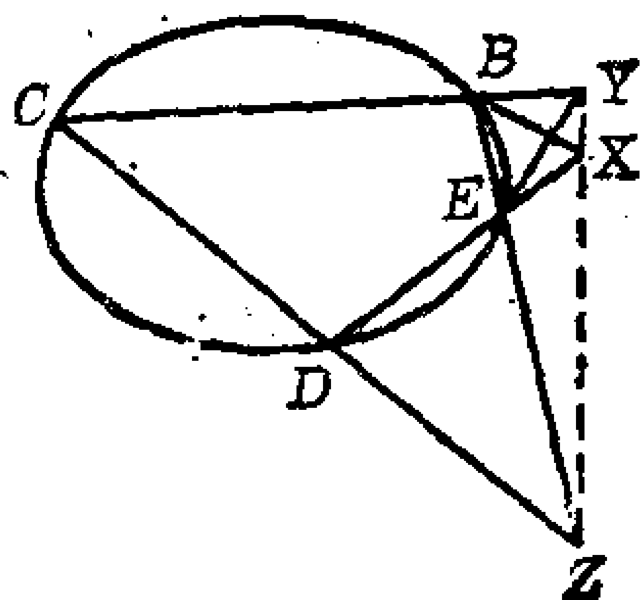


图 2-2

如果我们再把 E 沿着圆锥曲线连续地变为 F，则就得到：

定理 B 设 $BCDE$ 是圆锥曲线的内接四边形。该圆锥曲线在点 B 的切线与 DE 交于 X，在点 E 的切线与 BC 交于 Y。CD 和 BE 交于 Z。则 X、Y、Z 共线。

如果把 C 和 D 在重合在一起，便得到

定理 C 设 $\triangle ACE$ 是圆锥曲线的内接三角形。此圆锥曲线过顶点 A、C、E 的切线分别与对边 CE、EA、AC 交于 X、Y、Z，则 X、Y、Z 共线。

如果把 A 和 B 重合，同时把 D 和 E 重合，我们又得到一个新的定理。请大家写出这个定理的内容。又如果把点 X、Y、Z 中的某些变成无穷远点，我们又从上述诸定理得到许多新的定理。例如，在定理 C 中取 X 为无穷远点，便

得到：

定理 D 设 $\triangle ACE$ 是圆锥曲线的内接三角形. 如果该圆锥曲线过 A 的切线与 CE 平行，过 C 和 E 的切线与 EA、AC 分别交于点 Y、Z，则直线 YZ 平行于 CE.

如果把 X 和 Y 同时变成无穷远点，那末 Z 也应当是无穷远点. 所以定理 C 又变成：

定理 E 设 $\triangle ACE$ 是圆锥曲线的内接三角形. 如果过此三角形两个顶点作该圆锥曲线的切线分别与对边平行，则过第三个顶点的切线也与对边平行.

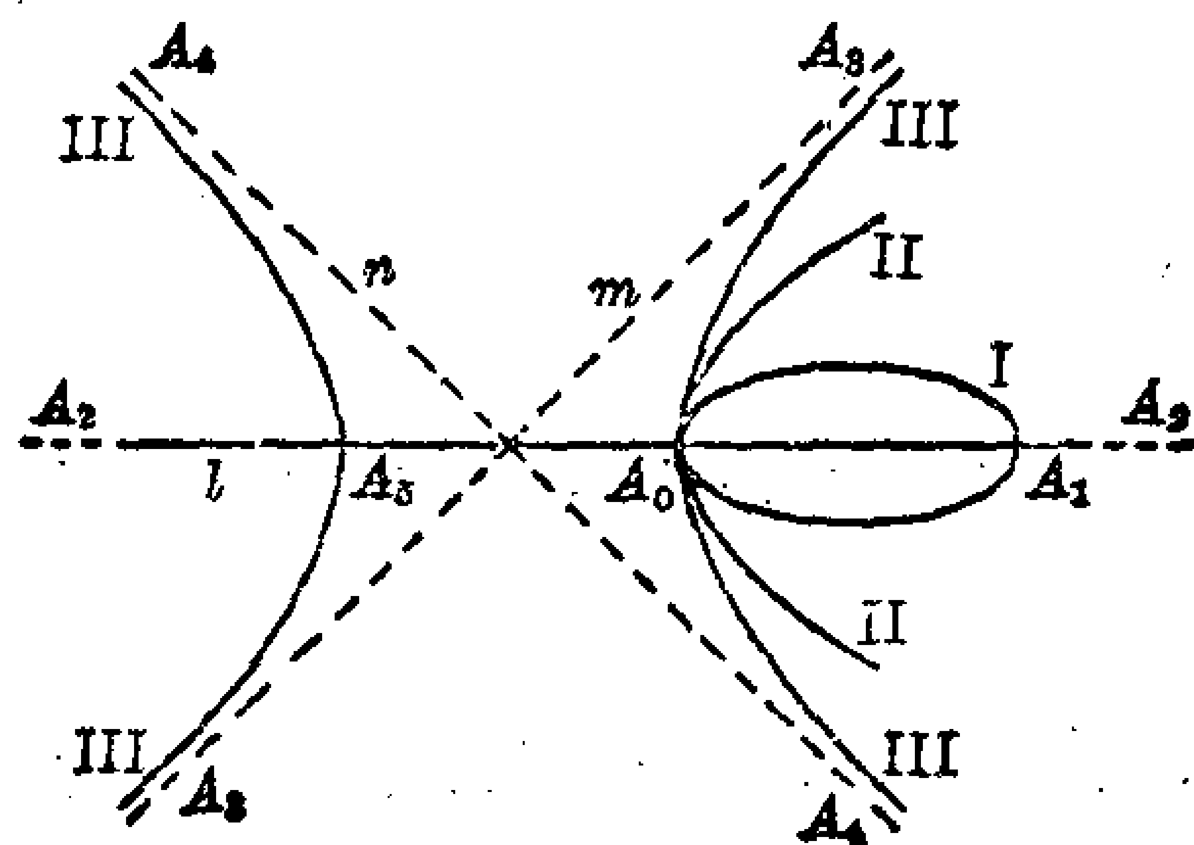


图 2-3

〔例 2〕 一条普通直线 l 加上无穷远点 A_2 成为一条射影直线 l (图 2-3). 普通直线 l 上另一点 A_1 可以通过点 A_0 沿着 l 连续地向左移到 A_5. 也可以沿着射影直线 l 向右走到无穷远点 A_2，然后从另一侧走到 A_5. 所以，射影直线 l 是一条封闭线. 现在考虑以普通直线 l 上的线段 A_0A_1 为轴的一个椭圆 I. 我们将 A_0 点固定不动，而把 A_1 逐渐沿 l 移向无穷远点 A_2. 则这个椭圆的轴 A_0A_1 愈来愈长. 而当 A_1 达到无穷远点 A_2 时，在欧氏平面中，封闭的椭圆断开了，并且断开的两侧均朝着无穷远点 A_2 走去，即愈来愈平行于直线 l. 这就是抛物线 II，它与无穷远直线切于点 A_2. 如果 A_1 沿着 l 再往前移，越过无穷远点 A_2 跑

到 l 的另一侧的点 A_5，那末抛物线也就变成了和无穷远直线交于 A_3 和 A_4 两点的曲线．点 A_0 和 A_5 分别在无穷远直线的两侧．所以在欧氏平面中，这个曲线表现出两个分支．这就是双曲线．于是我们看到：椭圆可以连续地变成抛物线，双曲线也可以连续地变成抛物线．而要把椭圆连续地变成双曲线，中间必定有一刹那它是抛物线．因为一条曲线从与无穷远直线不相交连续变成与无穷远直线交于两点，必然经历与无穷远直线相切的一瞬间．

〔例 3〕 我们在例 2 中说过，一条射影直线若不是无穷远直线，则它象圆周一样是封闭的．由于无穷远直线和其他射影直线是射影等价的，从而无穷远直线也可看成是封闭的．或者我们更形象地：任选一个非无穷远点 O，考虑过 O 的普通直线 l，

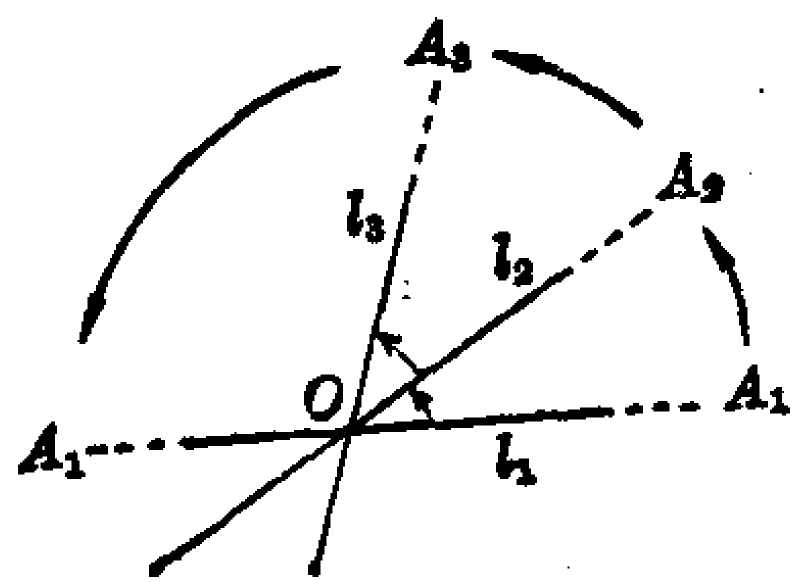


图 2-4

其上有无穷远点 A．当 l 以 O 为固定点从 l_1 出发沿反时针方向连续地经过直线 l_2、l_3、… 一直转 180° 又与 l_1 重合的时候，其上的无穷远点由 A_1 连续地经过 A_2、A_3… 又变到 A_1 自身，并且每个无穷远点都通过一次．所以无穷远直线也是封闭的．

既然每条射影直线 l 都象圆周那样是一条封闭线，所以 l 上的两个点把 l 分成两部分，从每个点出发均可以两种方式沿着 l 连续地走到另一点．对于 l 上任意三个不同的点，每个点都在另外两个点"之间"．即每个点均可沿 l

的一侧移到第二个点，而沿着另一侧移到第三个点．现在设 A、B、C、D 是射影直线上的四个不同的点，则会发生两种情况：(1) C 和 D 在 A 和 B 的同侧．这时将 C 沿 l 连续移到 D，可以不经过点 A 和点 B．(2) C 和 D 分别在 A 和 B 的两侧(图 2.5)．这时，将 C 沿 l 连续移到 D，必然要经过点 A 或者点 B．对于后一情形，我们称 C 和 D 被 A 和 B **所分离**．我们是否有简便的方法区分这两种情形呢？答案是肯定的：我们有一个数量，用它能够判别 C 和 D 是否被 A 和 B 所分离．这个数量叫作四点的复比．下一节我们要证，复比是射影不变量，从而射影直线上两个点被另外两个点分离与否，是一个射影不变性．

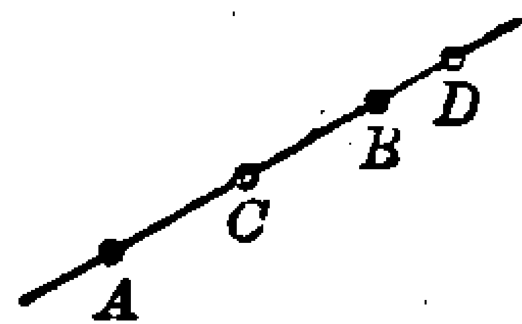


图 2-5

为了定义复比，我们首先介绍**有向线段**和它的**长度**．

设 l 是一个普通直线．我们在直线的两个方向中选定一个方向．设 A 和 B 是直线 l 上两个不同的点．我们把 AB 看成是从 A 到 B 的**有向线段**．如果从 A 到 B 和直线 l 所选定的方向一致，则有向线段 AB 的长度就是通常的长度，否则，若从 A 到 B 与选定的方向相反，则有向线段 AB 的长度是通常的长度加上负号．从现在起，为了节省记号，我们把有向线段 AB 的长度也记作 AB．于是 $AB = -BA$．而通常线段 AB 的长度是有向线段长度 AB 的绝对值 $|AB|$．当然，有向线段的长度与直线 l 所选取的方向有关．如果直线 l 选取另一个相反的方向，则有向线段的长度改变符号．

将直线 l 选定一个方向和单位长度，这就是通常的实数轴，其方向是从 0 到 1 的正方向．每个点 A 都有一个实坐标，我们把点 A 的坐标也仍然写成 A．那么对于实数轴 l 上任意两个点 A 和 B，有向线段 AB 的长度等于 $B-A$，即 $AB=B-A$．从而对于 l 上任意三个点 A、B、C，不论它们的次序如何，均有 $AB+BC=AC$．这是因为

$$AB+BC=(B-A)+(C-B)=C-A=AC.$$

再用数学归纳法即可证明：一般地，对于直线 l 上任意 n 个点 A_1、A_2、…、A_n，不管这 n 个点的次序如何，均有 $A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n=A_1A_n$．或者写成

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{n-1}A_n+A_nA_1=0.$$

这个简捷的公式体现了采用有向线段长度的好处．因为对于通常线段的长度，则它们的关系依赖于 n 个点各种可能的次序，那是很复杂的．

设 A、B、C 是普通直线 l 上三个不同的点．我们称 $\frac{AC}{BC}$ 为这三个点的**简单比**，表示成 (ABC)，即

$$(ABC)=\frac{AC}{BC}.$$

显然，简单比与三点的次序有关．但是，请读者验证：对于 A、B、C 三点六种可能的次序，其六种简单比有如下关系：

$$(ABC)=\frac{1}{(BAC)}=1-(ACB)\ (\text{由此推出下面等式})$$

$$=\frac{(CAB)-1}{(CAB)}=\frac{-(CBA)}{1-(CBA)}$$

$$=\frac{1}{1-(BCA)}. \tag{1}$$

如果改变直线 l 的选取方向，则 AC 和 BC 均改变符号，从而 (ABC) 不变．这就表明简单比具有一个很好的性质：它不依赖于直线 l 所选取的方向．

现在固定普通直线 l 上两个不同的点 A 和 B，而令 C 在直线 l 上连续移动．

(a) 当 C 在 AB 之间时，由于 AC 和 BC 的方向相反，所以它们的长度一正一负，于是 $(ABC)<0$．而当 C 在线段 AB 的外部时，BC 和 AC 的方向相同，所以 $(ABC)>0$．

(b) 当 $C=A$ 时，显然 $(ABA)=0$．当 C 从线段 AB 的内部接近 B 时，(ABC) 趋于 $-\infty$，而当 C 从线段 AB 的外部接近 B 时，(ABC) 趋于 ∞．

(c) 最后，当 C 趋近于直线 AB 上的无穷远点时，AC 和 BC 的比值趋近于1．

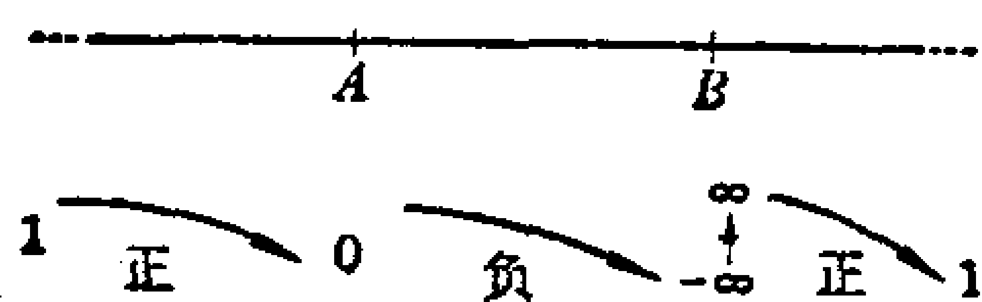


图 2-6 (ABC) 的变化

于是，我们得到 (ABC) 值（A、B 固定，C 点变化）的变化情况，如图 2-6 所示．从图中可以看出，对于每个实数 α，在射影直线 l 上都存在唯一的一点 C，使得 $(ABC)=\alpha$．所以，如果 C 和 D 是射影直线 l 上两个点，并且 $(ABC)=(ABD)$，则必然 $C=D$．

现在设 A、B、C、D 是普通直线 l 上的四个不同的点，我们称 $(ABC)/(ABD)$ 为这四个点的**复比**，表示成 $(AB|CD)$，于是

$$(AB|CD)=\frac{(ABC)}{(ABD)}=\frac{AC}{BC}\Big/\frac{AD}{BD}.$$

由于简单比与直线 l 的选取方向无关，所以复比也与 l 的选取方向无关．

复比 $(AB|CD)$ 与 A、B、C、D 的次序有关．但我们有如下的基本联系（证明留给读者）：

$$(AB|CD)=\frac{1}{(BA|CD)}$$

$$=\frac{1}{(AB|DC)}=1-(AC|BD). \tag{2}$$

设 A、B、C 是普通直线 l 上三个不同的点，而 D 和 D' 是 l 上另外两个点，如果 $(AB|CD)=(AB|CD')$，则必然 $D=D'$．这是因为：由复比定义可知

$$\frac{(ABC)}{(ABD)}=\frac{(ABC)}{(ABD')}.$$

由于 A、B、C 是三个不同的点，所以 $(ABC)\neq 0$．因此必然 $(ABD)=(ABD')$．再由简单比的性质，即知 $D=D'$．

如果 A、B 与 C、D 分离，则由简单比的性质可知 (ABC) 和 (ABD) 一正一负．于是 $(AB|CD)<0$．如果 A、B 和 C、D 不分离，则 (ABC) 和 (ABD) 有相同的符号，即 $(AB|CD)>0$．因此，对于普通直线 l 上四个不同的点 A、B、C、D，则 A、B 和 C、D 分离的充分必要条件是 $(AB|CD)<0$．利用连续原理，可知这件事在射影直线 l 上（即可以允许某个点为无穷远点）也是对的．换句话说，复比 $(AB|CD)$ 的符号正是判别 A、B 和 C、D 是否分离的一个量．当然，复比在射影几何中的重要性还不仅如此．我们在下节要证明它是射影不变量，并且有许多有趣的应

用.

练习题(四)

1. 验证文中的(1)式和(2)式.

2. 设 A、B、C、D 是射影直线上四个不同的点，证明 $(AB|CD)=(CD|AB)$. 所以若 A、B 和 C、D 分离，则 C、D 也和 A、B 分离.

3. 如果圆锥曲线内接六边形 $ABCDEF$ 的顶点 A 和 B 重合，D 和 E 重合，那末帕斯卡定理变成什么样子？

4. 过圆锥曲线 Ω 上一点 P，作 Ω 的切线(只用直尺).

5. 设 A、B、C、D 是某射影直线上四个不同的点，并且 D 是该射影直线上的无穷远点，则

(a) $$(AB|CD)=(ABC).$$

(b) $(AB|CD)=-1$ 的充分必要条件是 C 为线段 AB 的中点.

6. 设 V 是欧氏空间. V 中每个欧氏平面均按文中办法添加一条无穷远直线，从而扩充成射影平面. 并且规定：(1) 彼此平行的欧氏平面所添加的是同一条无穷远直线；(2) 彼此相交的两个欧氏平面所添加的无穷远直线是不同的；(3) V 中添加的全部无穷远点也构成一个射影平面——“无穷远平面”. 由此，欧氏空间 V 扩充成射影空间.

求证：射影空间中任意两个不同的射影平面均恰好交于一条射影直线.

2. 复比和它的应用

证明四点的复比是射影不变量，是件很容易的事情. 为此，我们只需要另一个类似的概念：线束的复比.

在同一射影直线上的一些点 A、B、C、D、… 叫作是一个**点列**；而在射影平面上，通过一固定点 O 的一些射影直线 a、b、c、d、… 叫作是一个**线束**，点 O 叫作此线束的**中心**. 我们取固定点 O 不是无穷远点，则过点 O 的线束中每条射影均不是无穷远直线. 现在设 a、b、c、d 是通过点 O 的一个线束，并且这四条射影直线彼此不同，我们定义它们的复比为：(图 2-7)

$$(ab|cd)=\frac{\sin(a,\ c)}{\sin(b,\ c)}\Big/\frac{\sin(a,\ d)}{\sin(b,\ d)}.$$

其中 $\sin(a,\ d)$ 表示直线 a 和 d 的夹角的正弦函数值. 但是，和线段有方向一样，我们这里两个直线的夹角也是有方向的. 例如：我们可以假定当从 a 到 b 逆时针时，角度取为正值，而从 a 到 b 为顺时针时，角度取为负值. 有了这样的规定，那末直线 a 和 b 的夹角不管取 α 还是取 β (见图 2-8). 它们的正弦值都是一样的：$\sin(a,\ b)=\sin\alpha$，或者 $\sin(a,\ b)=\sin(-\beta)=\sin(-(360^\circ-\alpha))=\sin\alpha$. 如果我们把逆时针旋转的角度规定是负的，而顺时针方向规定是正的，则 $\sin(a,\ b)$ 改变符号，但是复比 $(ab|cd)$ 的值保持不变，即与角度正负方向的两种不同取法无关.

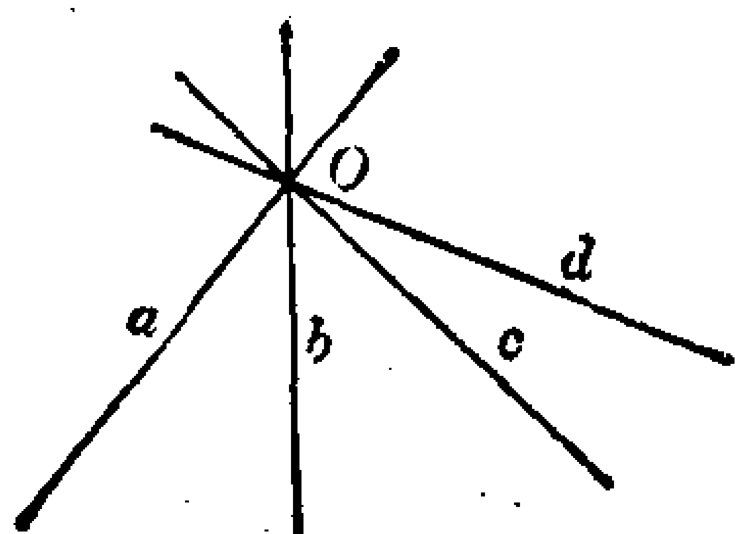


图 2-7

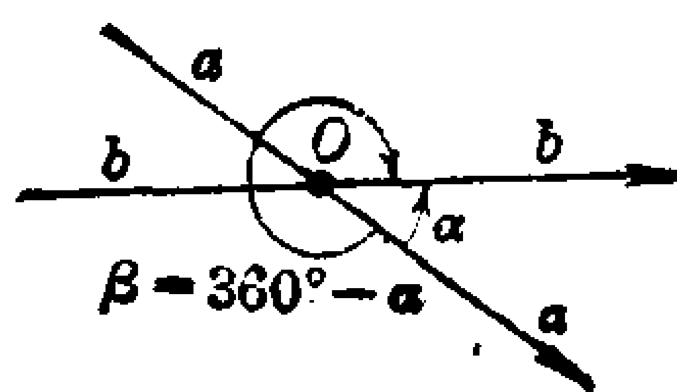


图 2-8

线束的复比和点列的复比有如下简单的联系：

定理 2 设 a、b、c、d 是以点 O 为中心的线束，不通过点 O 的直线 l 与 a、b、c、d 分别交于 A、B、C、D 四点，则

$$(ab|cd)=(AB|CD).$$

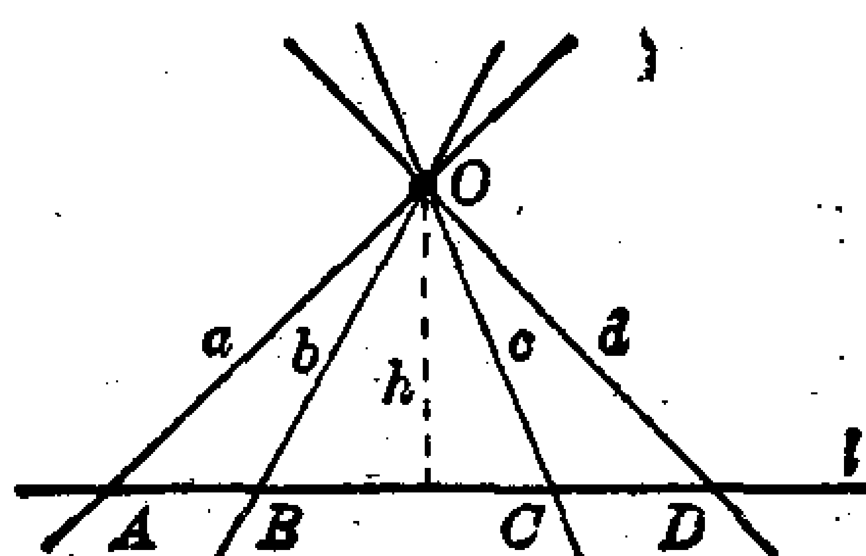


图 2-9

证明 设点 O 与直线 l 的距离为 h(图 2-9). 由于 O 不在 l 上，从而 $h>0$. 于是

$$2\cdot(\triangle ACO\text{的面积})=|AO|\cdot|CO|\cdot|\sin(a,\ c)|$$
$$=|AC|\cdot h.$$

从而 $$|AC|=\frac{|AO|\cdot|CO|}{h}\cdot|\sin(a,\ c)|.$$

我们总可以将过点 O 的两直线夹角方向和直线 l 的方向选取的一致(即当 a 和 c 的夹角为正时，有向线段 AC 的长度也为正，而当 a 和 c 的夹角为负时，AC 的长度也为负)，所以我们得到等式

$$AC=\frac{|AO|\cdot|CO|}{h}\cdot\sin(a,\ c).$$

同样地，可得到：

$$BC=\frac{|BO|\cdot|CO|}{h}\cdot\sin(b,\ c),$$

$$AD=\frac{|AO|\cdot|DO|}{h}\cdot\sin(a,\ d),$$

$$BD=\frac{|BO|\cdot|DO|}{h}\cdot\sin(b,\ d).$$

由这四个等式，立刻得到

$$(AB|CD)=\frac{AC}{BC}\bigg/\frac{AD}{BD}$$

$$=\frac{\sin(a,\ c)}{\sin(b,\ c)}\bigg/\frac{\sin(a,\ d)}{\sin(b,\ d)}=(ab|cd),$$

这就证明了定理 2.

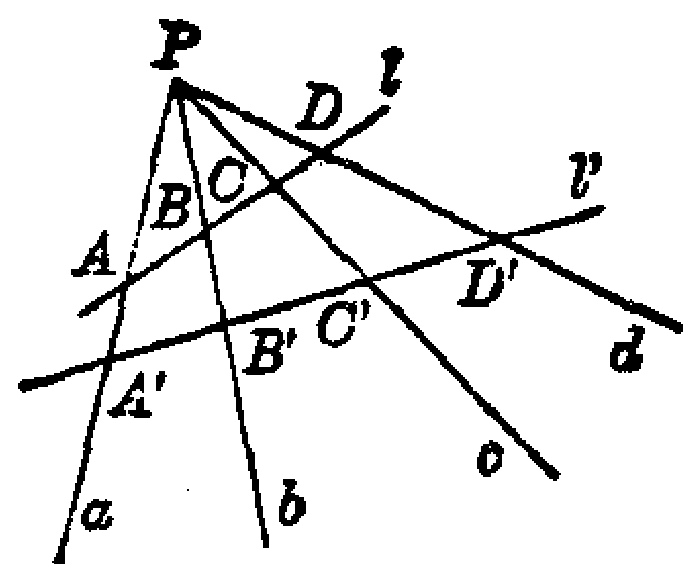


图 2-10

定理 3 点列的复比是射影不变量.

证明 设 A、B、C、D 是射影直线 l 上四个点. 以 P 为中心的中心射影将它们分别映成直线 l' 上的点 A'、B'、C'、D'. 于是点 P 和直线 l、l' 在同一个射影平面上，并且 P、A、A' 在同一直线 a 上，…，P、D、D' 在同一直线 d 上. 根据定理 2 即知

$$(AB|CD)=(ab|cd)=(A'B'|C'D').$$

这就证明复比是射影不变量.

定理 4 设 l 和 l' 是同一射影平面上的两条射影直线，A、B、C、D 和 A'、B'、C'、D' 分别是 l 和 l' 上的两个点列. 如果三条射影直线 AA'、BB'、CC' 交于一点 P，则 DD' 过 P 的充分必要条件是 $(AB|CD)=(A'B'|C'D')$.

证明 我们不妨设点 P 不是无穷远点(因为如果当 P

不是无穷远点时定理 4 成立，那么用连续原理可知当 P 为无穷远点时定理 4 也成立）．条件的必要性由定理 3 推出．反之，如果 $(AB|CD)=(A'B'|C'D')$．假设 PD 和 l' 交于 D''，则根据定理 3 的证明可知 $(AB|CD)=(A'B'|C'D'')$，于是 $(A'B'|C'D')=(A'B'|C'D'')$．再由复比的性质，即知 $D'=D''$．即 DD' 过点 P．证毕．

定理 5 设 l、l' 是交于点 P 的两条射影直线．P、A、B、C 和 P、A'、B'、C' 分别是 l 和 l' 上的点列．如果 $(PA|BC)=(PA'|B'C')$，则 AA'、BB'、CC' 共点．

证明 设 AA' 和 BB' 交于 Q（注意任意两条射影直线必交于一点）．连结 PQ．由 $(PA|BC)=(PA'|B'C')$ 和定理 4，即知 CC' 也过 Q．证毕．

定理 4 和定理 5 表明，利用复比我们可以解决三线共点和三点共线问题．作为应用，我们用复比来证明帕斯卡定理，德沙格定理和帕普斯定理．

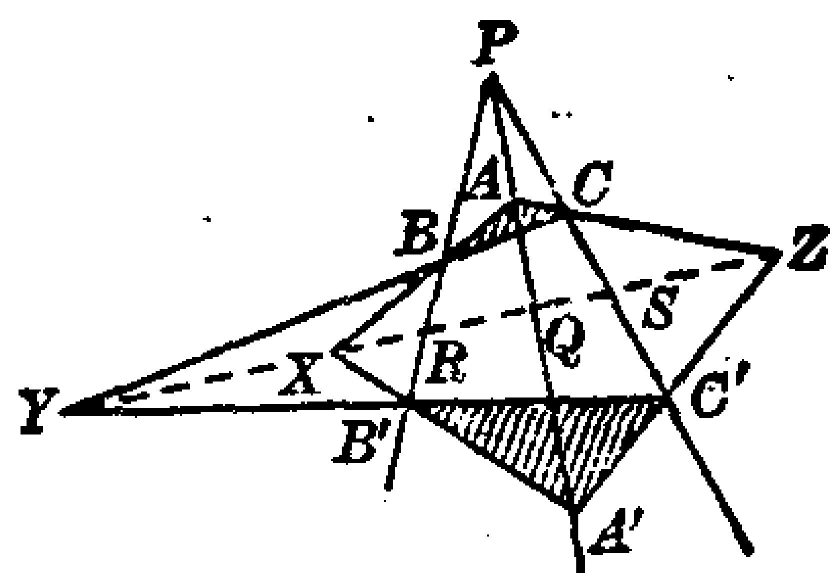


图 2-11

德沙格定理的第二个证明 根据德沙格定理假设，AA'、BB'、CC' 共点于 P．设 XY 与 PA、PB、PC 分别交于 Q、R、S（图 2-11）．考虑以 Y 为中心的线束 YP、YB、YB'、YR，我们有 $(PR|BB')=(PS|CC')$．再考虑以 X 为中心的线束 XP、XB、XB'、XR，又有 $(PR|BB')=(PQ|AA')$，从而 $(PS|CC')=(PQ|AA')$．于是由定理 5 可知 SQ、CA、$C'A'$ 共点．由于 CA 和 $C'A'$ 交于 Z，所以直线 SQ（即直

线 XY)过 Z，即 X、Y、Z 共线，这就证明了德沙格定理．

帕普斯定理的第二个证明 设射影直线 l 和 l' 交于点 P，E、A、C 在 l 上，B、D、F 在 l' 上．AB 和 DE 交于 X，CD 和 AF 交于 Z，EF 和 BC 交于 Y．我们要证 X、Y、Z 共线(见图 2-12)．为此，连结 CF，先考虑以

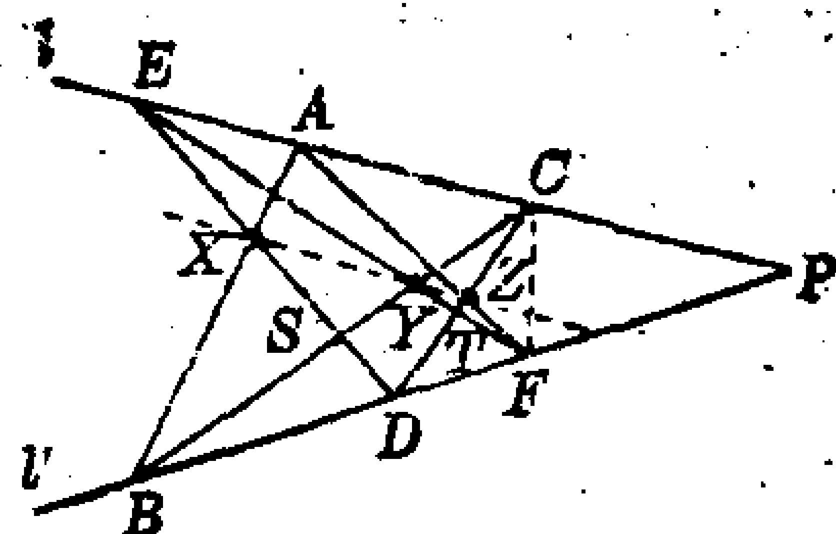


图 2-12

F 为中心的线束，则 $(PE|AC)=(DT|ZC)$，其中 T 是 EF 和 DC 的交点．再考虑以 B 为中心的线束，则 $(PE|AC)=(DE|XS)$，其中 S 是 ED 和 CB 的交点．于是 $(DT|ZC)=(DE|XS)$．再由定理 5，可知 TE、ZX、CS 共点、但是 TE 和 CS 交于 Y，从而 X、Y、Z 共线．证毕．

为了用复比证明帕斯卡定理，首先证明：

定理 6 设 A、B、C、D、P、P' 是某圆周上六个不同的点，则有如下的线束复比等式：

$$(PA,\ PB|PC,\ PD)=(P'A',\ P'B'|P'C',\ P'D').$$

证明 如图 2-13 所示．由圆周角定理，可知 $\alpha=\alpha'$，$\beta=\beta'$，$\gamma=\gamma'$．于是，

$$\begin{aligned}(PA,\ PB|PC,\ PD)&=\frac{\sin\alpha}{\sin(-\beta)}\Big/\frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin\gamma}\\&=\frac{\sin\alpha'}{\sin(-\beta')}\Big/\frac{\sin(\alpha'+\beta'+\gamma')}{\sin\gamma'}\\&=(PA',\ PB'|PC',\ PD').\end{aligned}$$

证毕．

设 a、b、c、d 是以 O 为中心的线束．在某个中心射影之

下变成以 O' 为中心的线束 a'、b'、c'、d'. 如果作一射影直线 l, 与 a、b、c、d 分别交于点 A、B、C、D, l 在该中心射影之下的象 l' 与 a'、b'、c'、d' 分别交于点 A'、B'、C'、D', 则 A'、B'、C'、D' 分别是 A、B、C、D 的象. 由于点列的复比是射影不变量, 所以 $(AB|CD) = (A'B'|C'D')$. 但根据定理2, $(ab|cd) = (AB|CD)$, $(a'b'|c'd') = (A'B'|C'D')$, 所以 $(ab|cd) = (a'b'|c'd')$. 这就表明线束的复比也是射影不变量.

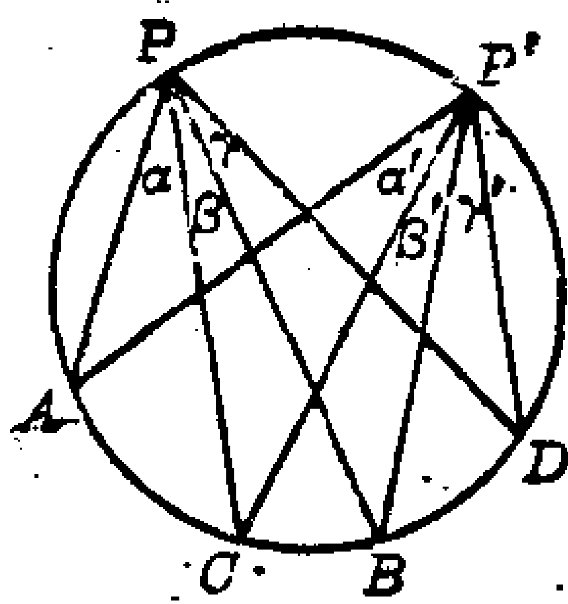


图 2-13

于是, 定理 6 中所涉及的是射影不变性质, 所以定理 6 不仅对于圆成立, 而且对于和圆射影等价的任意曲线, 即对于任意的圆锥曲线都是对的. 这是圆锥曲线的一条很基本的射影性质.

帕斯卡定理的第 4 个证明

设 FE 和 CD 交于 P, ED 和 BC 交于 Q. 先考虑以 F 为中心的线束, 则 $(FE, FA|FC, FD) = (PZ|CD)$ (图 2-14). 再考虑以 B 为中心的线束, 则 $(BE, BA|BC, BD) = (EX|QD)$. 但是, 由定理 6 知道: 上面两个等式的左边相等. 从而 $(PZ|CD) = (EX|QD)$. 于是, 由定理 5 便知 PE、ZX、CQ 共点. 但是 PE 和 CQ 交于 Y, 所以 X、Y、Z 共线. 证毕.

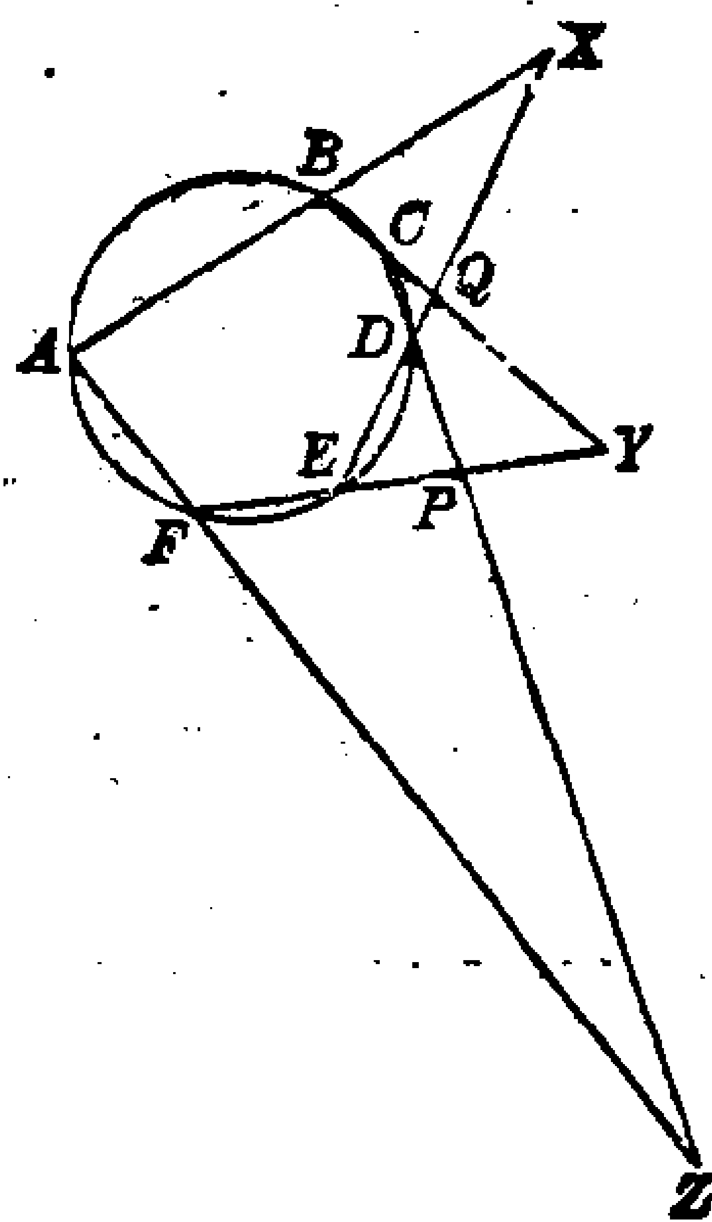


图 2-14

帕斯卡定理的这个证明不仅简捷，而且还有一个很大的好处：在这个证明中，我们完全没有用到 $ABCDEF$ 是圆锥曲线 l 的内接六边形，即 A、B、C、D、E、F 可以是圆锥曲线上次序随意的六个点．特别当这六个点的次序是 $ADBFCE$ 时，如果圆锥曲线 l 是椭圆，则现在帕斯卡定理的图形就成为图 2-15 那样的美妙形式．如果 l 是双曲线，就成为图 2-16 的形式．我们又知道，双曲线通过适当的连续变换可以趋近于它的两条相交的渐近直线．这时，利用连续性原理，图 2-16 就逐渐变成图 2.17 的样子．而图 2-17 就是帕普斯定理！所以，我们由帕斯卡定理(对于双曲线的情形)利用连续性原理就得到帕普斯定理，即：帕普斯定理是帕斯卡定理的一个“极限”情形．

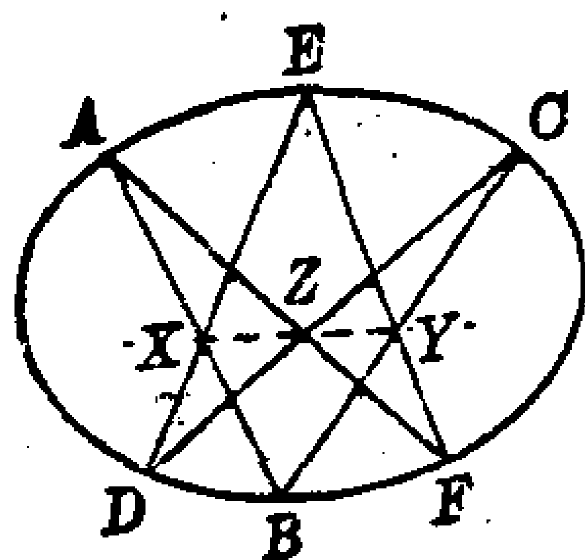


图 2-15

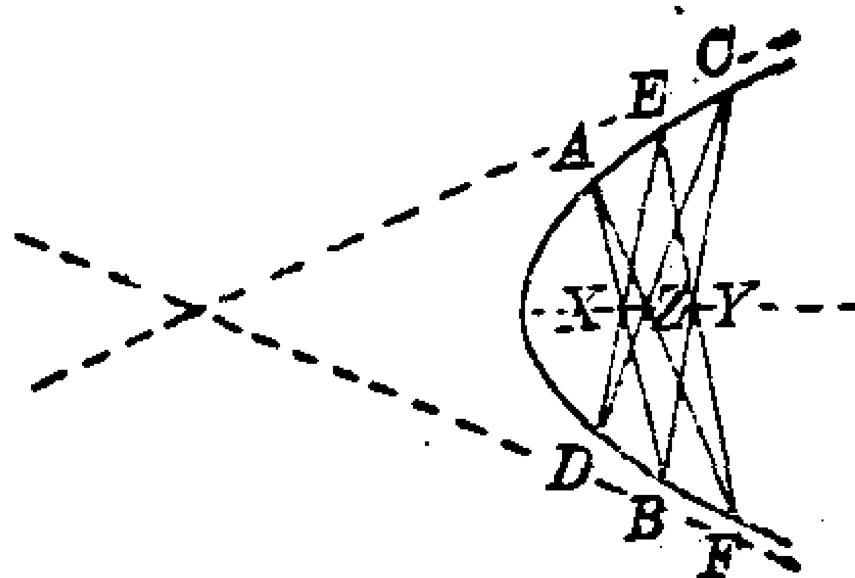
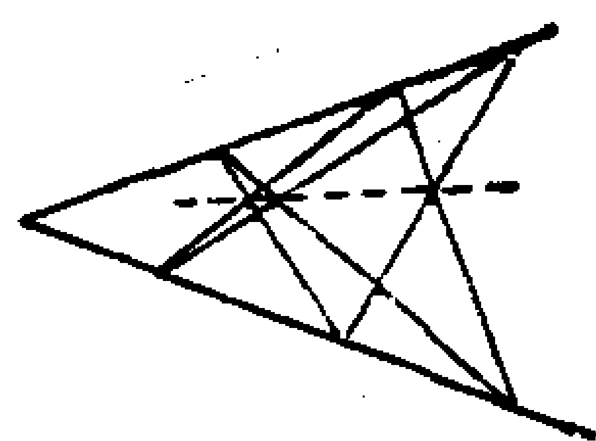


图 2-16


图 2-17

现在我们用复比解一些轨迹问题．

〔例 1〕 已知直线 l 和 l' 交于点 O，又有两点 S、S' 和点 O 共线．假设一直线 m 绕一定点 V 旋转，m 与 l 和 l' 分别交于 A 和 A'．AS 和 $A'S'$ 交于 P．求点 P 的轨迹．

解 过 V 作三直线 m_i，与 l 和 l' 分别交于 A_i 和 A'_i(其中 $i=1, 2, 3$)，则 $(OA_1|A_2A_3)=(OA'_1|A'_2A'_3)$．令 A_iS 和 A'_iS' 交于 P_i，则 P_i(其中 $i=1, 2, 3$)均是轨迹点 设 P_1P_2

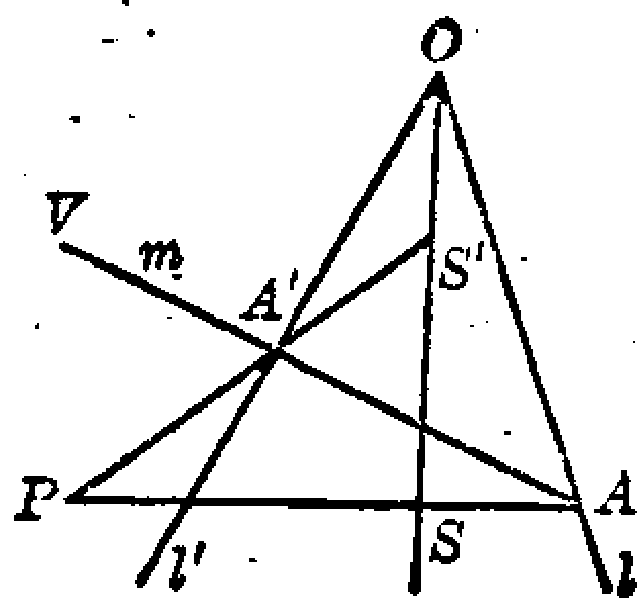


图 2-18

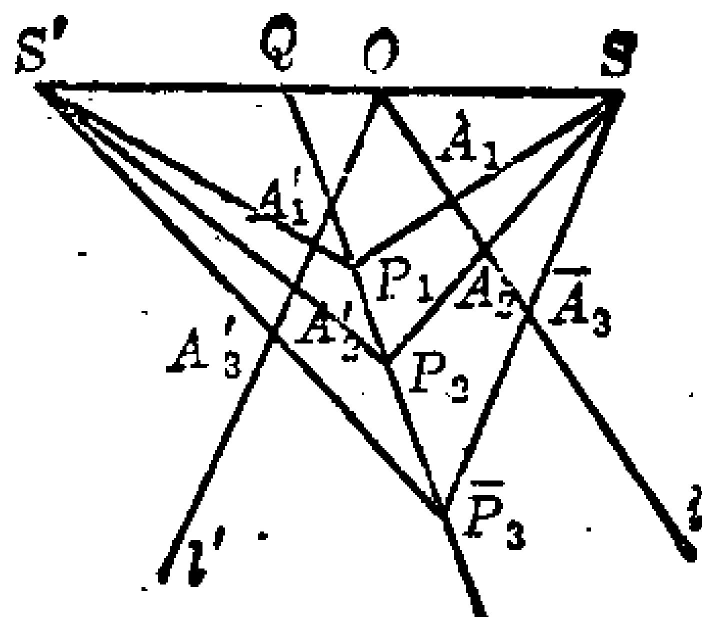


图 2-19

与直线 SS' 的交点为 Q, 与直线 A'_3S' 的交点为 $\bar{P}_3$, $\bar{P}_3S$ 与 l 的交点为 $\bar{A}_3$(图 2-19). 考虑以点 S' 为中心的线束, 则 $(OA'_1|A'_2A'_3)=(QP_1|P_2\bar{P}_3)$, 再考虑以 S 为中心的线束, 则 $(OA_1|A_2\bar{A}_3)=(QP_1|P_2\bar{P}_3)$. 于是 $(OA'_1|A'_2A'_3)=(OA_1|A_2\bar{A}_3)$. 但是, 已知 $(OA'_1|A'_2A'_3)=(OA_1|A_2A_3)$, 从而 $(OA_1|A_2\bar{A}_3)=(OA_1|A_2A_3)$, 于是 $A_3=\bar{A}_3$. 从而 $\bar{P}_3$ 是 A'_3S' 和 A_3S 的交点 P_3, 因此 P_3 在 P_1P_2 上. 所以轨迹是一条直线.

〔例 2〕 设 $ABCD$ 为给定的四边形. 在 AD、BC 上各取点 E 和 F, 使得 $AE/BF=AD/BC$, 求 AF 和 BE 交点 P 的轨迹.

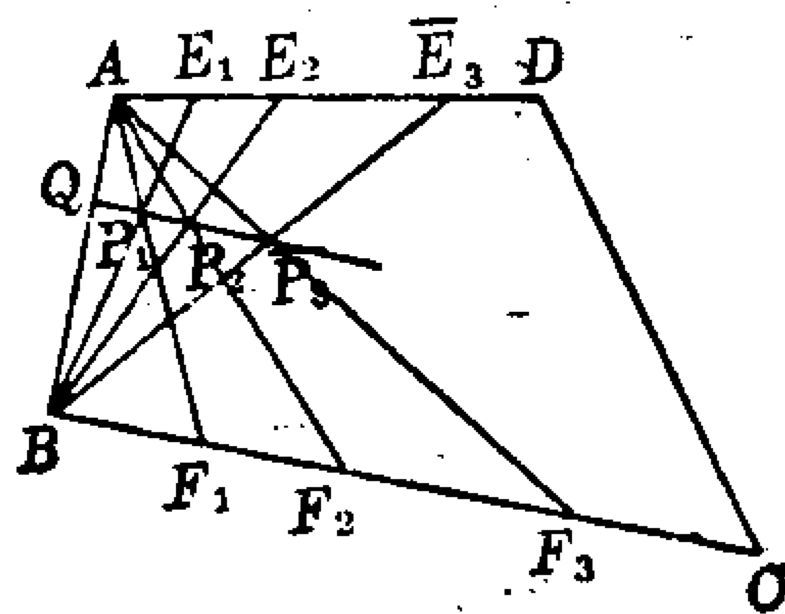


图 2-20

解 设 AD 和 BC 上各取点 E_i 和 F_i(其中 $i=1, 2, 3$), 使得

$$\frac{AE_i}{BF_i}=\frac{AD}{BC}$$

(其中 $i=1, 2, 3$). 由此即知 $(AE_1|E_2E_3)=(BF_1|F_2F_3)$. 设 P_i 为 AF_i 和 BE_i 的交点, 则 P_1、P_2、P_3 均为轨迹点. 设

P_1P_2 与 AB、AF_3 分别交于 Q 和 $\bar{P}_3$, $\bar{P}_3B$ 与 AD 交于 $\bar{E}_3$ (图 2-20), 则 $(BE_1|E_2E_3)=(AF_1|F_2F_3)=(QP_1|P_2\bar{P}_3)=(AE_1|E_2\bar{E}_3)$. 从而 $E_3=\bar{E}_3$. 于是 $\bar{P}_3$ 即为 AF_3 和 BE_3 的交点 P_3, 即 P_1、P_2、P_3 共线, 所以轨迹是一直线.

练习题(五)

1. 设直线 l 和 l' 在同一平面上. A 和 A' 分别是直线 l、l' 上的定点. 在直线 l 和 l' 上分别取两个动点, 使 $AX=A'X'$, 求 AX' 和 $A'X$ 的交点 P 的轨迹.

2. 设 PQ 是某圆的一条弦, M 为 PQ 的中点. 过 M 作该圆的另外两条弦 AB 和 CD. 如果 PQ 与 AD 和 CB 分别交于 T 和 S, 求证 $TM=MS$.

3. 用复比证明梅内劳斯定理: 一直线 l 与 $\triangle ABC$ 的三边 AB、BC、CA 分别交于点 X、Y、Z, 则

$$\frac{AX}{BX}\cdot\frac{BY}{CY}\cdot\frac{CZ}{AZ}=1.$$

4. 设 A、B、C 是普通直线 l 上三个不同的点, 求证对于每个实数 α, 在直线 l 上存在唯一的一点 D, 使得

$$(AB|DC)=\alpha.$$

5. 设 A_1、A_2、$\cdots$、A_n 为平面上 n 个点. 一直线 l 与 A_1A_2 交于 X_1, 与 A_2A_3 交于 X_2, $\cdots$, 与 $A_{n-1}A_n$ 交于 X_{n-1}, 与 A_nA_1 交于 X_n. 求证

$$(A_1A_2X_1)(A_2A_3X_2)\cdots(A_{n-1}A_nX_{n-1})(A_nA_1X_n)=1.$$

6. 设 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6 是一条直线上六个不同

的点．求证：

(1) $(A_1A_2|A_3A_4)(A_1A_2|A_4A_5)(A_1A_2|A_5A_3)=1$.

(2) $(A_1A_2|A_3A_4)(A_1A_2|A_5A_6)=(A_1A_2|A_3A_6)(A_1A_2|A_5A_4)$.

7. 设直线 l 与 $\triangle ABC$ 的三边 AB、BC、CA 分别交于 C'、A'、B'，又 O 为 l 上一点，求证

$$(OA,\ OB|OC,\ l)=(A'B'|C'O).$$

8. 设 A、B 为圆锥曲线 Ω 上两点，C 和 D 不在 Ω 上．令直线 AC 与 Ω 的另一交点为 P，BD 与 Ω 的另一交点为 Q，AD 与 Ω 的另一交点为 U，BC 与 Ω 的另一交点为 V，求证 CD、PQ 和 UV 共点．

3. 美的构图

——调和点列

设 A、B、C、D 是射影直线 l 上四个不同的点，如果 $(AB|CD)=-1$，则称 A、B、C、D 是**调和点列**．或者叫作 A、B 被 C、D **调和分割**．这时，由于 $(AB|CD)<0$，从而 A、B 和 C、D 是分离的．下面是调和点列的例子．

〔例 1〕 设 SAB 为三角形，C 和 D 分别是顶点 S 处内角平分线，和外角平分线与对边 AB 的交点，则 A、B、C、D 是调和点列．这是因为（见图 2-21）：$2\alpha+2\beta=180°$，从而

$$(AB|CD)=\frac{\sin\alpha}{\sin(-\alpha)}\Big/\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\beta}$$

$$=-\frac{\sin\beta}{\sin\beta}=-1.$$

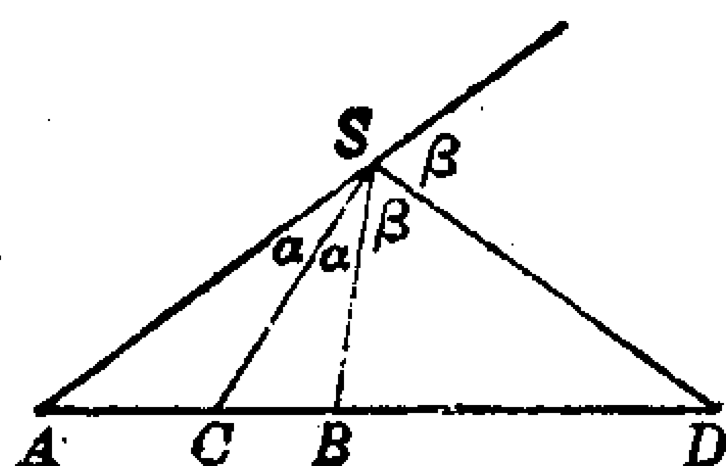


图 2-21

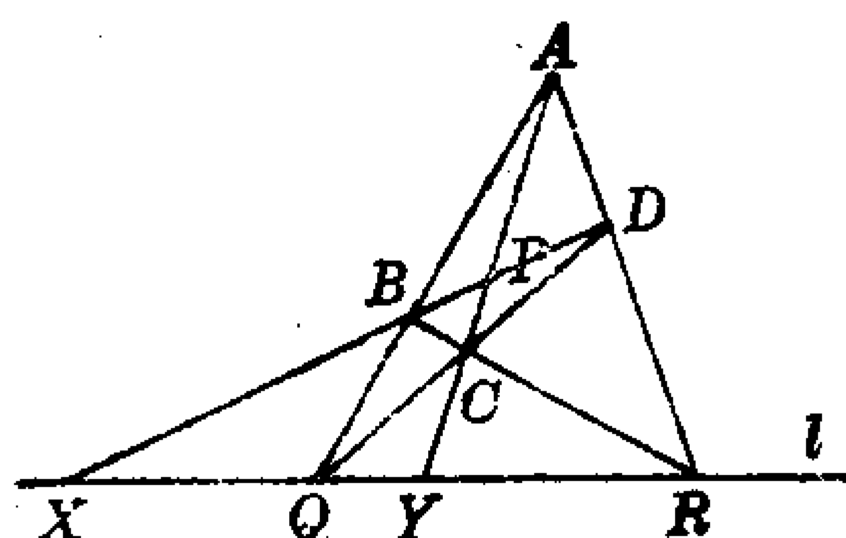


图 2-22

最优美的调和分割构图，是由下面的所谓"完全四边形"$ABCDQR$ 给出.

定理7 设 $ABCD$ 是平面四边形. 对边 AB 和 DC 交于 Q, 对边 AD 和 BC 交于 R; 对角线 AC 和 BD 交于 P. 设 BD 和 QR 交于 X, AC 和 QR 交于 Y, 则 D、B、P、X; A、C、P、Y; Q、R、Y、X 都是调和点列(图 2-22).

证明 考虑以 C 为中心的线束, 可知 $(QR|YX)=(DB|PX)$. 考虑以 A 为中心的线束, 可知 $(QR|YX)=(BD|PX)$. 于是

$$(BD|PX)=(DB|PX)=\frac{1}{(BD|PX)}.$$

从而 $(DB|PX)=\pm 1$. 由于 $(DD|PX)=1$, 而 $B\neq D$, 可知 $(DB|PX)\neq 1$, 于是 $(DB|PX)=-1$, 即 D、B、P、X (和 Q、R、Y、X) 是调和点列. 类似地, 可证 A、C、P、Y 也是调和点列. 证毕.

给了一个四边形 $ABCD$, 除了对角线 AC 和 BD 之外, 我们把两组对边的交点连成的线段 QR 也叫作对角线.

$ABCDQR$ 叫作是完全四边形．定理 7 可以重新叙述成：完全四边形的任意一条对角线的两端，都被它和另外两条对角线的交点所调和分割．

设 X、Q、R 是同一直线上三个不同的点．定理 7 给出求点 Y 使得 $(XY|QR)=-1$ 的方法：在该直线外任取一点 A，连结 AQ 和 AR；过 X 作一直线，与 AQ、AR 分别交于 B 和 D；DQ 和 BR 交于 C，则 AC 和 RQ 的交点即为所求．

现在我们谈调和点列和复比的应用．第一个应用是研究所有四边形的射影等价分类．我们这里所说的四边形，都指的是它的任意三个顶点均不共线．前已指出，任意两个三角形都是射影等价的（参见本书第 24 页），更确切地说，设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是任意两个三角形，都可以通过有限次中心射影，把 A、B、C 分别变为 A'、B'、C'．现在我们要进一步证明：所有的四边形都是彼此等价的．更确切地说，我们有如下的重要定理：

定理 8 设 A、B、C、D 是同一射影平面上的四点，并且任意三点均不共线．而 A'、B'、C'、D' 也是这样的四个点．则存在有限多中心射影依次作用所给出的变换把 A、B、C、D 分别变成 A'、B'、C'、D'．并且，这个变换是唯一的．

证明 设直线 AB 和 CD 交于 F，$A'B'$ 和 $C'D'$ 交于 F'（图 2-23）．首先，我们将这两个图形放到两个不同的平面 π、π' 中．使 B 与 B' 重合，并且位在两平面交线 l 上，

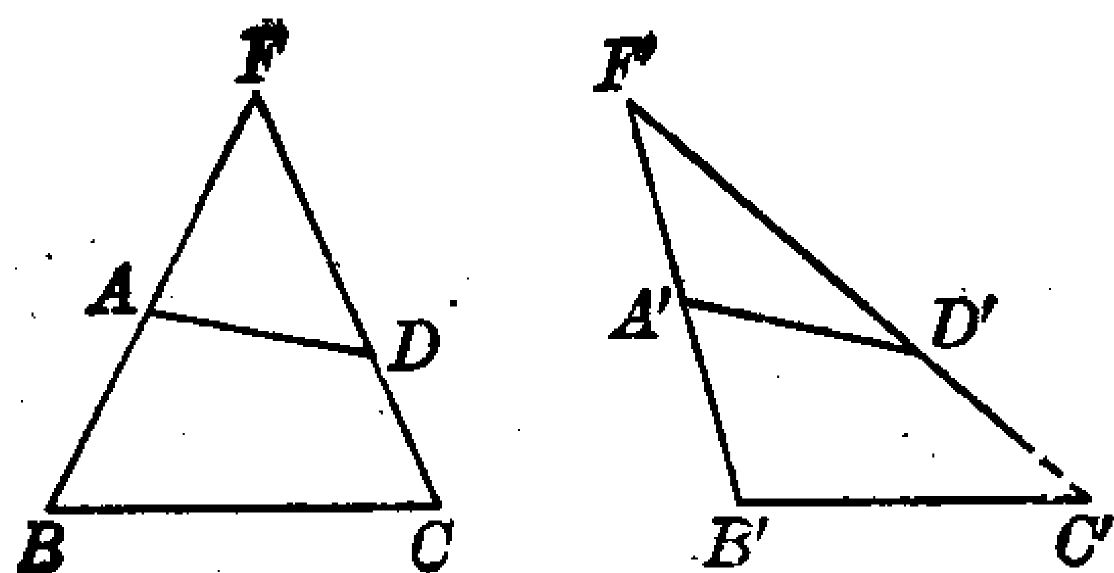


图 2-23

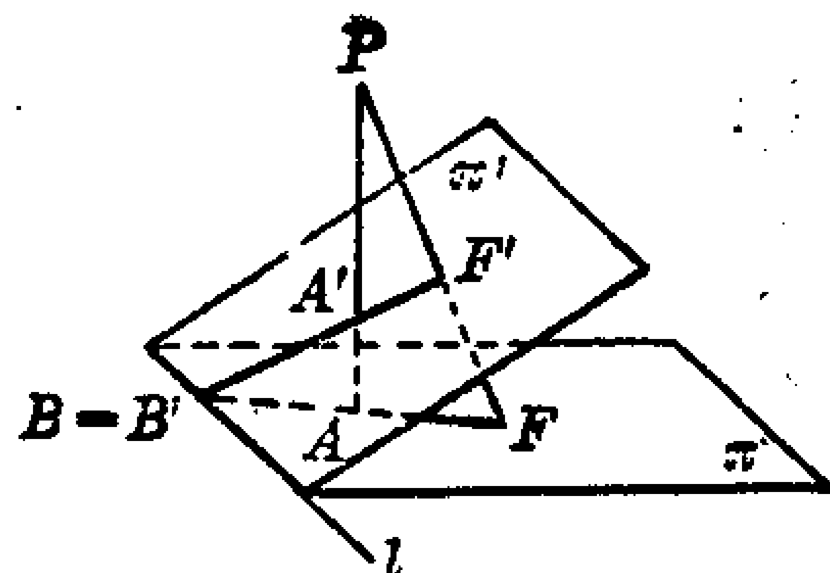


图 2-24

并且 $B'F'$ 和 FB 均与 l 只有一个交点 $B(=B')$. 设 P 为 AA' 和 FF' 的交点，则以 P 为中心的中心射影将 B'、A'、F' 变为 B、A、F. 因此，在图 2-23 中，我们不妨可设 $BA=B'A'$, $AF=A'F'$. 类似地，我们再把这两图形放在两个平面中，将 B、A、F 与 B'、A'、F' 重合，并且它们都放在两平面交线上. 以 DD' 和 CC' 的交点为中心的中心射影将 C、D 分别变成 C'、D'，而 $A=A'$ 和 $B=B'$ 保持不动. 从而将 A、B、C、D 分别变成 A'、B'、C'、D'.

现在我们证明这样变换 σ 的唯一性: 由于这样的变换是有限个中心射影变换依次作用的结果，所以它仍旧保持射影不变性质. 特别地，它将直线变成直线. 并且保持复比不变. 由假设，σ 把 A、B、C、D 分别变成 A'、B'、C'、D'. 为了证明 σ 的唯一性，我们只要证明: 对于 $ABCD$ 所在平面的每个点 X，σ 都把 X 变成 $A'B'C'D'$ 所在平面的唯一确定的点 X'. 为证此，仍设 AB 和 CD 交于 F，$A'B'$ 和 $C'D'$ 交于 F'. 又设 BX 和 CD 交

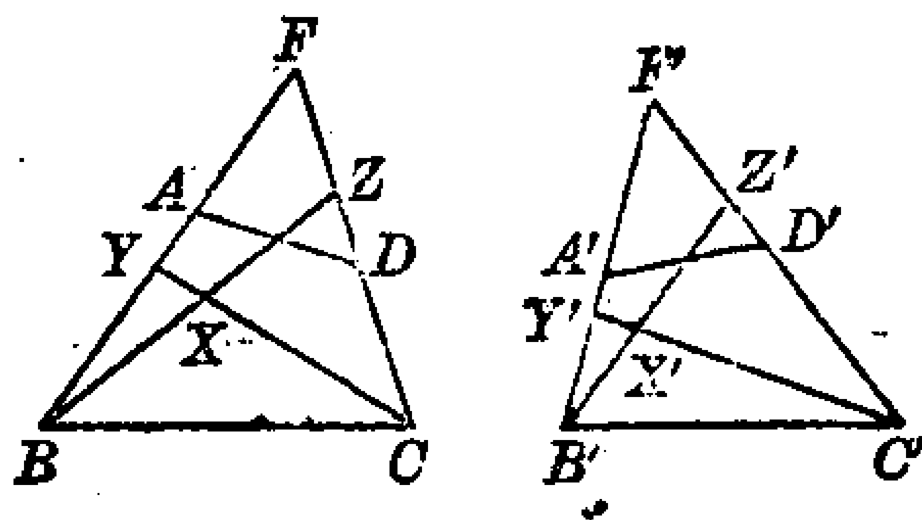


图 2-25

于 Z, CX 和 AB 交于 Y(图 2-25). 注意 C、D、F 是三个不同的点, C'、D'、F' 也是三个不同的点, 并且 σ 把 F 变为 F'. 如果 Z 是 C、D 或者 F, 则 σ 把 Z 变成 C'、D' 或者 F'. 如果 Z 不是 C、D、F, 则 $(CD|ZF)$ 是一个实数. 根据上节习题 4, $C'D'$ 直线上存在唯一的点 Z', 使得 $(C'D', |Z'F') = (CD|ZF)$. 由于 σ 保持复比, 所以 σ 必然把 Z 变成 Z'. 换句话说, σ 把 Z 变成 $C'D'$ 上唯一确定的点 Z'. 同样地, σ 也把 Y 变成 $A'B'$ 上唯一确定的点 Y'. 因此, 若 $B'Z'$ 和 $C'Y'$ 的交点为 X', 则 σ 把 X 变到唯一可能的点 X'. 这就证明了 σ 的唯一性. 证毕.

现在我们再引进一个术语: 我们把有限个中心射影依次作用所给出的变换叫作是**射影变换**. 于是, 定理 8 可以简述为, 存在着唯一的射影变换, 将 A、B、C、D 分别变成 A'、B'、C'、D'. (其中 A、B、C、D 是射影平面上四个点, 并且任意三个均不共线; A'、B'、C'、D' 也是如此.) 而射影平面上的两个几何图形射影等价, 就是指存在一个射影变换将其中一个变成另一个. 我们知道, 射影变换将射影直线变成射影直线, 并且保持复比. 现在我们证明反过来也对, 即

定理 9 射影平面 π 到射影平面 π' 上的变换 σ(即点之间的一一对应)若将射影直线变成射影直线, 并且保持复比, 则 σ 必为射影变换.

证明 设 A、B、C、D 是射影平面 π 上四个点, 并且任意三点均不共线. σ 把它们分别变成射影平面 π' 上的点

A'、B'、C'、D'，由于 σ 将射影直线变成射影直线，可知 A'、B'、C'、D' 中任意三点也不共线．定理 8 已经证明了存在射影变换 σ' 把 A、B、C、D 分别变成 A'、B'、C'、D'．现在变换 σ 和 σ' 均把射影直线变成射影直线并且保持复比，而在定理 8 证明的后一半我们实际上是证明了只有唯一的这样的变换将 A、B、C、D 分别变成 A'、B'、C'、D'．于是 $\sigma=\sigma'$，即 σ 是射影变换．证毕．

由定理 9 可知，将射影直线变成直线和保持复比这两条，是射影变换的最基本性质．我们在下节还要对此作进一步讨论．

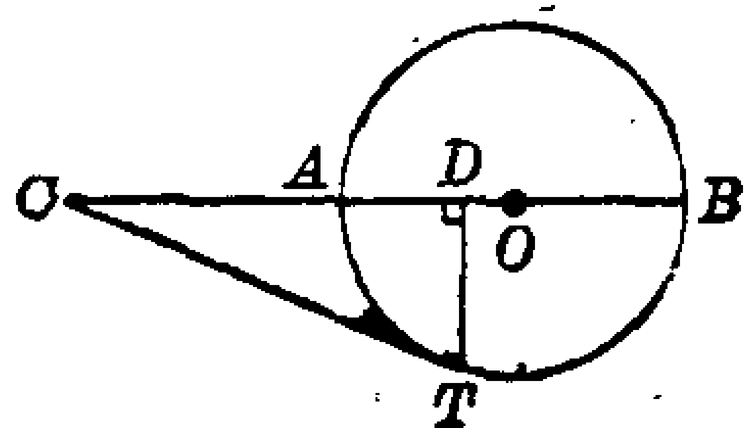


图 2-26

我们已经看到，在完全四边形中包含着三组调和点列．现在介绍与圆相联系的一个调和点列(另两个参见本节练习题第 4 和 9 题)．

〔例 2〕 过圆 O 外一点 C 和圆心 O 作直线，与该圆交于 A 和 B．直线 CT 与该圆切于点 T，过 T 作 AB 的垂线其垂足为 D，则 A、B、C、D 为调和点列(图 2-26)．

证明 设 $OA=r$，$AC=a$．则 $(CT)^2=(r+a)^2-r^2=a^2+2ar$，

$$DC=\frac{(CT)^2}{OC}=\frac{a^2+2ar}{r+a},$$

$$DA=DC-a=\frac{ar}{r+a},$$

$$BD=2r-DA=\frac{2r^2+ar}{r+a}.$$

于是

$$(AB|CD)=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BD}{AD}$$

$$=-\frac{a}{2r+a}\cdot\frac{2r^2+ar}{ar}=-1.$$

证毕.

现在我们利用调和分割证明一个著名的定理.

定理 10(塞瓦(G. Ceva, 1648～1734)定理) 设$\triangle ABC$三边AB、BC、CA上分别有点C'、A'、B'，则直线AA'、BB'、CC'共点的充分必要条件是

$$(ABC')(BCA')(CAB')=-1. \quad (1)$$

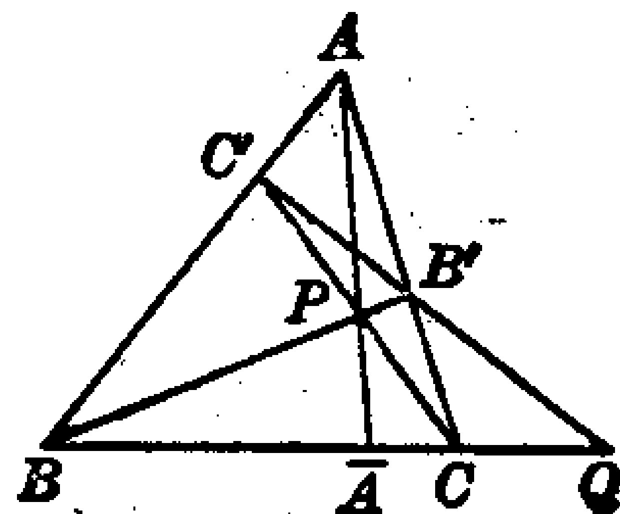


图 2-27

证明 设Q是$B'C'$和BC的交点，P是BB'和CC'的交点. $\overline{A}$是AP与BC的交点. 我们只需证明:

$$(ABC')(BC\overline{A})(CAB')=-1. \quad (2)$$

因为如果(2)式成立，则(1)式相当于$(BCA')=(BC\overline{A})$，即$A'=\overline{A}$. 从而(1)式相当于AA'、BB'、CC'共点.

由梅内劳斯定理(采用本书第 57 页练习题第 3 题的形式)，我们有$(ABC')(BCQ)(CAB')=1$. 又由于B、C、$\overline{A}$、Q是调和点列，从而$(BC\overline{A})=-(BCQ)$. 由这两个公式即得(2)式，从而证明了定理 10.

前面我们讲述了调和点列. 完全类似地，我们可以定义调和线束. 设a、b、c、d是共点的四条直线，如果$(ab|cd)=-1$，则它们叫作**调和线束**. 由于线束的复比等于用一直线截出的点列的复比(上节定理 2)，从而由本节例 1 可知,

三角形过一顶点的内角和外角平分线与过该顶点的两边形成调和线束. 在完全四边形中，包含有许多调和点列(定理7)，从而也包含许多调和线束. 比如我们有如下的定理

定理 7′ 设 a、b、c、d 是平面四边形的四条边. a 和 b 的交点与 c 和 d 的交点相连结为直线 q; a 和 d 的交点与 b 和 c 的交点相连结，为直线 r; a 和 c 交点与 b 和 d 的交点相连结为直线 p. 设直线 q 和 r 交于点 L; 点 L 与 b 和 d 的交点相连结，为直线 x; 点 L 与 a 和 c 的交点相连结为直线 y. 则以点 L 为中心的线束 q、r、y、x 是调和线束. d、b、p、x 和 a、c、p、y 也均是调和线束.

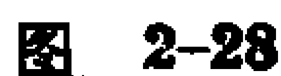


图 2-28

证明 根据定理 7, q、r、y、x 与直线 p 的四个交点是调和点列，从而 q、r、y、x 是调和线束. 类似可证另外两组线束的调和性.

由前面的例 2，我们直接得到：

〔例 3〕 过圆 O 外一点 C 和圆心 O 的直线，与该圆交于 A 和 B. 过 C 作该圆切线，切点为 T. 过 T 作 AB 的垂线，垂足为 D (参见图 2-26). 则 TA、TB、TC、TD 是调和线束.

最后，我们再举一个用调和点列求轨迹的例子.

〔例 4〕 设 A、B、C 是不共线的三个定点，l 是过点 C 的一条直线，P 是直线 l 上一个动点. 设 AP 和 BC 交于

点 X，AO 和 BP 交于点 Y，求证 XY 通过一个定点(即当 P 在 l 上移动时，XY 形成一个线束)。

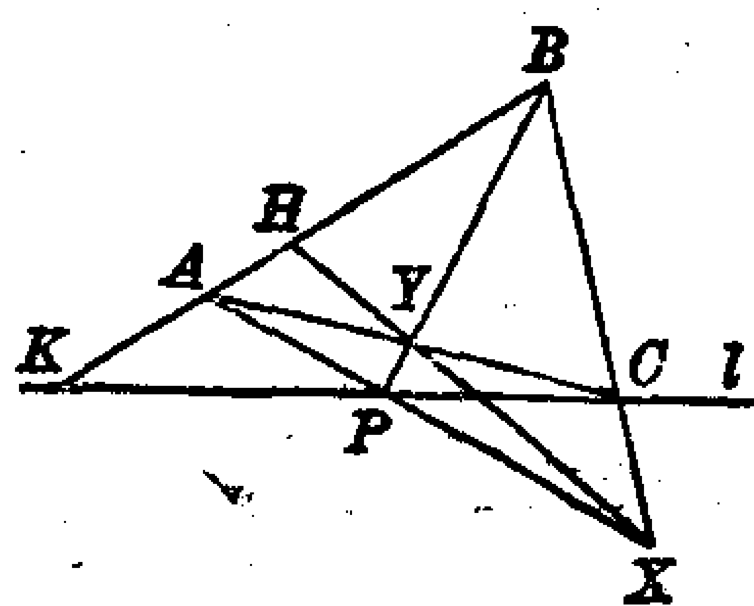


图 2-29

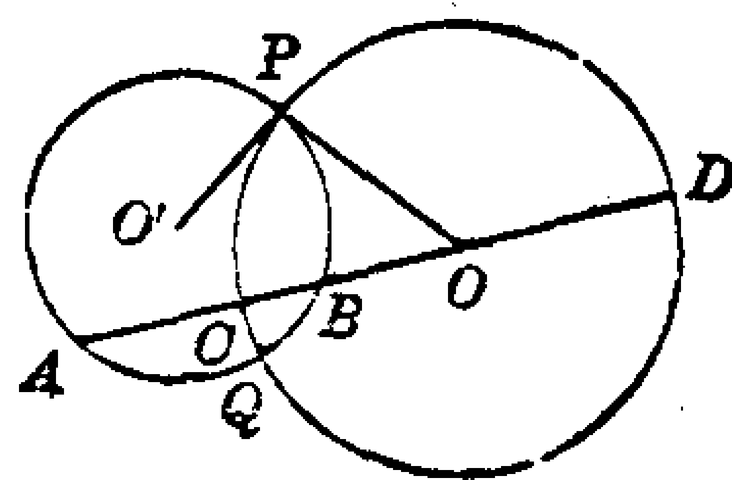
证明 设 K 是 l 与 AB 的交点，H 是 XY 与 AB 的交点（图 2-29）。我们得到完全四边形 $YPXCAB$. 于是，由定理7，B、H、A、K 是调和点列. 由于 A、B、K 均为定点，从而 H 也是直线 AB 上一个定点，而 XY 直线通过定点 H. 证毕.

练 习 题（六）

1. 若 A、B、C、D 是某直线上的调和点列，则 B、A、C、D; C、D、A、B; A、B、D、C 均是调和点列.

2. 设 A、B、C、D 是调和点列，M 为线段 CD 的中点，则 $AM \cdot BM = (CM)^2$.

3. 设直线 l 与 $\triangle ABC$ 的 BC 边平行，且与 AC 和 AB 分别交于 D 和 E. BD 和 CE 交点为O. 求证直线 AO 和 BC 的交点是 BC 的中点.



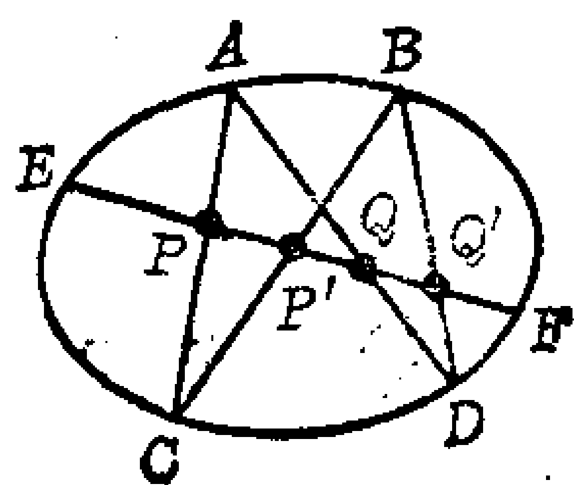
（第 4 题图）

4. 设 O 和 O' 为相交于两点 P、Q 的两个圆的圆心. 过 O 的一直线与圆 O 交于 C 和 D，与圆 O' 交于 A 和 B. 求证：A、B、C、D 形成调和点列的充分必要条件是圆 O 和圆 O' 正交(即 $O'P$ 和 OP 垂直).

5. 射影变换 σ 将某直线上两点 A 和 B 保持不动，并且将该直线另一点 C 变为第四点 D，求证：σ 将 D 变为 C 的充分必要条件是 A、B、C、D 为调和点列.

6. 设 l_1、l_2、l_3、l_4 是同一射影平面上的四条射影直线，并且其中任意三条均不共点. 又若 l'_1、l'_2、l'_3、l'_4 也是具有同样性质的四条射影直线. 求证存在唯一的射影变换，将 l_1、l_2、l_3、l_4 分别变成 l'_1、l'_2、l'_3、l'_4.

7. 设 A、B、C、D、E、F 是椭圆上六个点. A 和 B 在 EF 的一侧，C 和 D 在 EF 的另一侧(如图). 如果 EF 和 AC, AD, BC, BD 分别交于 P, Q, P', Q'. 求证



(第 7 题图)

$$(EF|PQ)=(EF|P'Q').$$

8. 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 的三边 A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 上各取一点 D_3, D_1, D_2. 设 A_1D_1 和 A_2D_2 交于 P_3, A_2D_2 和 A_3D_3 交于 P_1, A_3D_3 和 A_1D_1 交于 P_2. 求证

$$(A_1D_1|P_2P_3)=(A_2D_2|P_3P_1)=(A_3D_3|P_1P_2).$$

9. 两圆 O_1 和 O_2 相交于 A、B 两点. l 是它们的公切线，与圆 O_1 和 O_2 分别切于点 T_1 和 T_2. 过点 A 和 B 再作圆 O, 与 l 交于 P 和 P' 两点. 求证 $(PP'|T_1T_2)=-1$.

10. 设 A、B、C、D 为一直线上的四点，则 $(AB|CD)=-1$ 的充分必要条件是

$$\frac{2}{CD}=\left(\frac{1}{CA}+\frac{1}{CB}\right).$$

11. 设 $ABCD$ 是平行四边形. 过 A 作直线 AE 平行于对角线 BD, 求证 $(AE, AC|AB, AD)=-1$.

12. 设过点 P 可作圆锥曲线 Ω 的两条切线; 其切点分别为 T_1 和 T_2. 过 P 又作 Ω 的一条割线, 和 Ω 交于 R、S 两点. 设此割线与 T_1T_2 交于 Q, 求证 $(PQ|RS)=-1$.

4. 射 影 坐 标

——代数工具的引入

这一节我们换一下口味, 讲一点代数. 我们在本书一开头说过, 笛卡儿在欧氏平面里引入直角坐标系, 从而将平面图形的性质和问题化成解方程组等代数问题, 产生了解析几何. 将欧氏平面扩大成射影平面之后, 是否仍有适宜的坐标系统来表达点、射影直线以及其他几何图形呢? 答案是肯定的. 这就是本节中所要讲的射影坐标.

在平面解析几何中, 欧氏平面上每个点用坐标 (x, y) 表示, 而每条直线可表示成二元一次方程

$$a_1x+a_2y+a_0=0, \tag{1}$$

其中 a_1 和 a_2 不全为零. 在射影平面中, 每个点 P 用三个坐标表示成 $(x_0:x_1:x_2)$, 其中 x_0、x_1、x_2 不全为零, 叫作是点 P 的**射影坐标**(也叫作**齐次坐标**). 但是要注意: 如果两组射影坐标 $(x_0:x_1:x_2)$ 和 $(x'_0:x'_1:x'_2)$ 相差一个公共的非零因子, 即存在实数 $\alpha\neq0$, 使得 $x_0=\alpha x'_0$、$x_1=\alpha x'_1$、$x_2=\alpha x'_2$, 则规定它们表示同一个点, 即

$$(x_0:x_1:x_2)=(\alpha x_0:\alpha x_1:\alpha x_2). \quad (\text{对于 } \alpha\neq 0)$$

否则，它们便表示射影平面上不同的点。于是，当 $x_0\neq 0$ 时，则射影平面上的点 $(x_0:x_1:x_2)$ 也就是点 $\left(1:\frac{x_1}{x_0}:\frac{x_2}{x_0}\right)$. 我们把这个点等同于欧氏平面上的点 $\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$. 换句话说，欧氏平面上的点 (x, y) 看成扩大了的射影平面上的点，它的射影坐标是 $(1:x:y)$，或者 $(\alpha:\alpha x:\alpha y)$，其中 α 是任意非零实数。若 $(x, y)\neq(x', y')$，易知 $(1:x:y)\neq(1:x':y')$.（因为若 $(1:x:y)\neq(1:x':y')$，则 $1=1\cdot\alpha$、$x=x'\alpha$、$y=y'\alpha$，于是 $\alpha=1$ 而 $x=x'$、$y=y'$，从而 $(x, y)=(x', y')$.）所以，射影平面上其射影坐标 $x_0\neq 0$ 的那些点和欧氏平面上的点是一一对应的。从而利用射影坐标和上述的对应方式，我们把欧氏平面以代数的方式嵌到射影平面之中。显然，射影平面中射影坐标 $x_0=0$ 的那些点 $(0:x_1:x_2)$ 就应当对应着无穷远点。为了更清楚地说明这件事，让我们回到欧氏平面中直线的方程(1)。将此方程中的直角坐标 (x, y) 改成它的射影坐标 $(x_0:x_1:x_2)$，即令

$$x=\frac{x_1}{x_0}、\qquad y=\frac{x_2}{x_0},$$

代入(1)式，就得到一个齐次方程：

$$a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2=0. \tag{2}$$

其中 a_1、a_2 不全为零。如果把这个方程看成是射影平面中的方程，对于它的解 $(x_0:x_1:x_2)$（这里 x_0、x_1、x_2 不全为零），在 $x_0\neq 0$ 时，就是欧氏空间中普通直线上的点；而在 $x_0=0$

时，它在射影平面中只有一个解$(0:a_2:-a_1)$，这就是该普通直线(1)上所要添加的那个无穷远点！因此，当a_1、a_2不全为零时，方程(1)表示射影平面中的一条射影直线，它是普通直线(1)加上无穷远点$(0:a_2:-a_1)$．由于射影平面中每个无穷远点都是由某个普通直线所添加出来的，因此射影平面中的每个无穷远点的射影坐标都具有形式$(0:x_1:x_2)$，其中x_1和x_2不全为零．特别，当$x_1\neq0$时，这个无穷远点可以写成$\left(0:1:\frac{x_2}{x_1}\right)$，而当$x_2\neq0$时，它可以写成$\left(0:\frac{x_1}{x_2}:1\right)$．这些无穷远点恰好是方程$x_0=0$的全部解$(0:x_1:x_2)$（其中$x_1$、$x_2$不全为零）．所以，当$a_0\neq0$、$a_1=a_2=0$时，方程(2)表达出射影平面中的无穷远直线！于是，对于任意一组不全为零的实数a_0、a_1、a_2，方程(2)均表示射影平面中的一条射影直线．而且将a_0、a_1、a_2改成αa_0、αa_1、αa_2时（其中α为任意非零实数），所得到的新方程与原方程(2)是一样的．

我们把射影直线(2)表示成$[a_0:a_1:a_2]$（其中a_0、a_1、a_2不全为零），由上述可知，对于任意非零实数α，$[a_0:a_1:a_2]=[\alpha a_0:\alpha_1 a:\alpha a_2]$．所以，在射影平面中，点和射影直线的代数表达方式极其相似，只不过点采用圆括号而射影直线采用方括号．因此，我们也把$[a_0:a_1:a_2]$叫作直线(2)的射影坐标．请大家证明，如不存在非零实数α，满足$a_0=\alpha a_0'$、$a_1=\alpha a_1'$、$a_2=\alpha a_2'$，则$[a_0:a_1:a_2]$和$[a_0':a_1':a_2']$是不同的射影直线．

我们还需验证：两条平行的普通直线上添加了同一个无穷远点，而相交的普通直线具有不同的无穷远点。设 $a_0+a_1x+a_2y=0$ 和 $a_0'+a_1'x+a_2'y=0$ 是欧氏平面中两条不同的直线。大家从解析几何中知道，这两条直线平行的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1' & a_2' \end{vmatrix}=a_1a_2'-a_1'a_2=0.$$

而这两条直线上所添加的无穷远点分别是 $(0:a_2:-a_1)$ 和 $(0:a_2':-a_1')$。不难证明，这两个无穷远点相等的充分必要条件也是 $a_1a_2'-a_1'a_2=0$。因为如果 $(0:a_2:-a_1)=(0:a_2':-a_1')$，则存在 $\alpha\neq0$，使得 $a_2=\alpha a_2'$、$a_1=\alpha a_1'$。从而 $a_1a_2'-a_1'a_2=\alpha a_1'a_2'-\alpha a_1'a_2'=0$。反之，若 $a_1a_2'-a_1'a_2=0$，即 $a_1a_2'=a_1'a_2$。由于 a_1' 和 a_2' 不全为零，在 $a_1'\neq0$ 时令 $\alpha=\dfrac{a_1}{a_1'}$，在 $a_2'\neq0$ 时令 $\alpha=a_2/a_2'$，我们总有 $a_2=\alpha a_2'$、$a_1=\alpha a_1'$。综合上述，我们证明了：两条平行直线添加同一无穷远点，而两条相交直线添加了不同的无穷远点。

通过上面的过程，我们在射影平面中引进了完美的射影坐标系。每个点表示成 $(x_0:x_1:x_2)$（其中 x_0、x_1、x_2 是不全为零的实数），$x_0=0$ 时表示无穷远点。而每条射影直线 $a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2=0$ 表示成 $[a_0:a_1:a_2]$（其中 a_0、a_1、a_2 不全为零），而 $a_1=a_2=0$（于是 $a_0\neq0$）时表示射影平面中那条无穷远直线，即无穷远直线为 $[1:0:0]$。

有了代数工具之后，射影几何中的许多几何问题同样

可以化成代数表达方式．例如，我们看如何用射影坐标来刻划三点共线和三线共点性质．

定理 11 (1) 射影平面上三个点$(x_0:x_1:x_2)$、$(y_0:y_1:y_2)$和$(z_0:z_1:z_2)$共线的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}=0.$$

(2) 射影平面上三条射影直线$[a_0:a_1:a_2]$、$[b_0:b_1:b_2]$和$[c_0:c_1:c_2]$共点的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}=0.$$

证明 三点$(x_0:x_1:x_2)$、$(y_0:y_1:y_2)$和$(z_0:z_1:z_2)$均在直线$[a_0:a_1:a_2]$上，相当于说$(X, Y, Z)=(a_0, a_1, a_2)$是下列三元一次方程组的解：

$$\begin{cases} x_0X+x_1Y+x_2Z=0, \\ y_0X+y_1Y+y_2Z=0, \\ z_0X+z_1Y+z_2Z=0. \end{cases}$$

由于a_0、a_1、a_2不全为零，而由代数知识我们知道，上述方程组有不全为零的解，当且仅当行列式$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 \\ z_0 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}$等于零，这就证明了(1)．完全类似地可证明(2)．

定理 12 (1) 设$A=(a_0:a_1:a_2)$和$B=(b_0:b_1:b_2)$是两

个不同的点．则点$(x_0:x_1:x_2)$在AB直线上的充分必要条件是存在两个不全为零的实数λ、μ，使得$x_i=\lambda a_i+\mu b_i$(其中$i=0, 1, 2$)．

(2) 设$l=[a_0:a_1:a_2]$和$m=[b_0:b_1:b_2]$是两条不同的射影直线．则射影直线$n=[x_0:x_1:x_2]$与l、m共点的充分必要条件是存在两个不全为零的实数λ、μ，使得$x_i=\lambda a_i+\mu b_i$(其中$i=0, 1, 2$)．

证明 (1) 和 (2)的证明完全类似．我们只证明(2)．根据定理11，若直线l、m和n共点，则

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & x_0 \\ a_1 & b_1 & x_1 \\ a_2 & b_2 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

于是方程组

$$\begin{cases} a_0X+b_0Y+x_0Z=0, \\ a_1X+b_1Y+x_1Z=0, \\ a_2X+b_2Y+x_2Z=0 \end{cases} \tag{4}$$

有不全为零的解X、Y、Z．如果$Z=0$，则X和Y不全为0．当$X\neq 0$时

$$a_i=\frac{Y}{X}b_i.$$

当$Y\neq 0$时

$$b_i=\frac{X}{Y}a_i$$

(其中$i=0, 1, 2$)．即总有$[a_0:a_1:a_2]=[b_0:b_1:b_2]$．这与我们假定$l\neq m$相矛盾．所以，必然$Z\neq 0$．于是(4)式可

写成

$$x_i=-\frac{X}{Z}a_i-\frac{Y}{Z}b_i$$

(其中 $i=0, 1, 2$). 取

$$\lambda=-\frac{X}{Z}、\quad \mu=-\frac{Y}{Z}$$

即为所求(由于 x_0、x_1、x_2 不全为零，从而 λ、μ 也不全为零).

反之，如果 $x_i=\lambda a_i+\mu b_i$(其中 $i=0, 1, 2$)，令直线 l 和 m 的交点为$(y_0:y_1:y_2)$，则 $a_0y_0+a_1y_1+a_2y_2=0$, $b_0y_0+b_1y_1+b_2y_2=0$，于是

$$\begin{aligned}x_0y_0+x_1y_1+x_2y_2&=(\lambda a_0+\mu b_0)y_0+(\lambda a_1+\mu b_1)y_1\\&\quad+(\lambda a_2+\mu b_2)y_2=\lambda(a_0y_0+a_1y_1\\&\quad+a_2y_2)+\mu(b_0y_0+b_1y_1+b_2y_2)\\&=0.\end{aligned}$$

即直线 n 也过 l 和 m 的交点，从而三直线共点. 证毕.

现在我们谈如何用射影坐标来表示点列和线束的复比.

定理 13 (1) 设 $A=(a_0:a_1:a_2)$, $B=(b_0:b_1:b_2)$, $C=(c_0:c_1:c_2)$, $D=(d_0:d_1:d_2)$是同一射影直线上四个不同的点. $c_i=\lambda a_i+\mu b_i$, $d_i=\lambda' a_i+\mu' b_i$ (其中 $i=0, 1, 2$). 则

$$(AB|CD)=\frac{\mu}{\lambda}\Big/\frac{\mu'}{\lambda'}.$$

(2) 设 $l=[a_0:a_1:a_2]$, $m=[b_0:b_1:b_2]$, $n=[c_0:c_1:c_2]$, $p=[d_0:d_1:d_2]$是共点的四条不同射影直线. $c_i=\lambda a_i+\mu b_i$, $d_i=\lambda' a_i+\mu' b_i$(其中 $i=0, 1, 2$)，则

$$(lm|np)=\frac{\mu}{\lambda}\Big/\frac{\mu'}{\lambda'}.$$

证明 (1) 由于中心射影保持复比，我们通过中心射影总可使 A、B、C、D 所在的射影直线不是无穷远直线. 并且也不妨假设 A、B、C、D 均不是无穷远点(因为利用连续性原理即可由此证明这四点有一个为无穷远点的情形). 于是 a_0、b_0、c_0、d_0 均不为 0. 不妨设 $a_0=b_0=1$. 则写成直角坐标，$A=(a_1, a_2)$, $B=(b_1, b_2)$,

$$C=\left(\frac{\lambda a_1+\mu b_1}{\lambda+\mu}, \frac{\lambda a_2+\mu b_2}{\lambda+\mu}\right),$$

$$D=\left(\frac{\lambda' a_1+\mu' b_1}{\lambda'+\mu'}, \frac{\lambda' a_2+\mu' b_2}{\lambda'+\mu'}\right).$$

又可用中心射影把这条直线投射到直角坐标系的 OX 轴上，即将点(x, y)变成$(x, 0)$. 于是 A、B、C、D 四点分别变成实数轴上的点 $A'=a_1$, $B'=b_1$,

$$C'=\frac{\lambda a_1+\mu b_1}{\lambda+\mu}, \qquad D'=\frac{\lambda' a_1+\mu' b_1}{\lambda'+\mu'}.$$

于是 $$(AB|CD)=(A'B'|C'D')=\frac{A'C'}{B'C'}\Big/\frac{A'D'}{B'D'}.$$

但是

$$\frac{A'C'}{B'C'}=\left(\frac{\lambda a_1+\mu b_1}{\lambda+\mu}-a_1\right)\left(\frac{\lambda a_1+\mu b_1}{\lambda+\mu}-b_1\right)^{-1}$$

$$=\left(\frac{\mu(b_1-a_1)}{\lambda+\mu}\right)\left(\frac{\lambda(a_1-b_1)}{\lambda+\mu}\right)^{-1}=-\frac{\mu}{\lambda},$$

类似地， $$\frac{A'D'}{B'D'}=-\frac{\mu'}{\lambda'}.$$

于是 $$(AB|CD)=\frac{\mu}{\lambda}\Big/\frac{\mu'}{\lambda'}.$$

(2) 由于线束复比也是射影不变量，从而我们不妨假定 l、m、n、p 均不是直线[0:1:0]. 于是 a_0、a_2 不能同时为零. 由于点 $(x_0:x_1:x_2)$ 在直线 $[a_0:a_1:a_2]$ 上的充分必要条件是 $a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2=0$，从而可直接验证 $l=[a_0:a_1:a_2]$ 与[0:1:0]的交点为 $A=(a_2:0:-a_0)$. 类似地，m、n、p 与[0:1:0]的交点分别为 $B=(b_2:0:-b_0)$，$C=(c_2:0:-c_0)=(\lambda a_2+\mu b_2:0:\lambda(-a_0)+\mu(-b_0))$，$D=(d_2:0:-d_0)=(\lambda' a_2+\mu' b_2:0:\lambda'(-a_0)+\mu'(-b_0))$. 于是，由本定理的第 (1) 部分，即知

$$(lm|np)=(AB|CD)=\frac{\mu}{\lambda}\Big/\frac{\mu'}{\lambda'}.$$

证毕.

射影变换是否也有代数表达方式呢？答案也是令人愉快的. 设 a_{ij}(其中 $0\leqslant i, j\leqslant 2$)是九个实数. 考虑射影平面上的映射 σ，它把点 $(x_0:x_1:x_2)$ 变为点 $(y_0:y_1:y_2)$，其中

$$\begin{cases} y_0=a_{00}x_0+a_{01}x_1+a_{02}x_2, \\ y_1=a_{10}x_0+a_{11}x_1+a_{12}x_2, \\ y_2=a_{20}x_0+a_{21}x_1+a_{22}x_2. \end{cases} \tag{3}$$

如果点 $(x_0:x_1:x_2)$ 的射影坐标改成用 $(\alpha x_0:\alpha x_1:\alpha x_2)$(其中 $\alpha\neq 0$)，则用 (3) 式算出 σ 把它变为 $(\alpha y_0:\alpha y_1:\alpha y_2)$，这与 $(y_0:y_1:y_2)$ 是同一个点. 所以映射 σ 确实把射影平面上的点映成点，即与点的射影坐标的不同选取方式无关. 利用三元一次联立方程解的代数特性，可以证明：σ 是变换(即是射影平面上点之间的一一对应)的充分必要条件是系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

不等于零．现在我们证明

定理 14 形如 (3) 式的变换是射影变换．并且，射影平面上的每个射影变换均具有(3)式的形式．

证明 我们根据定理 9，为了证明由(3)式定义的变换 σ 是射影变换，只需证明 σ 将射影直线变成射影直线，并且保持复比不变．设 $A=(x_0:x_1:x_2)$、$B=(y_0:y_1:y_2)$、$C=(z_0:z_1:z_2)$是共线的三个不同的点，则 $z_i=\lambda x_i+\mu y_i$（其中 $i=0, 1, 2$）．σ 把 A、B、C 分别变成 $A'=(x'_0:x'_1:x'_2)$、$B'=(y'_0:y'_1:y'_2)$、$C'=(z'_0:z'_1:z'_2)$，其中

$$x'_i=\sum_{k=0}^{2} a_{ik}x_k,$$

$$y'_i=\sum_{k=0}^{2} a_{ik}y_k,$$

$$z'_i=\sum_{k=0}^{2} a_{ik}z_k=\sum_{k=0}^{2} a_{ik}(\lambda x_k+\mu y_k)$$

$$=\lambda\sum_{k=0}^{2} a_{ik}x_k+\mu\sum_{k=0}^{2} a_{ik}y_k=\lambda x'_i+\mu y'_i$$

（这里 $i=0, 1, 2$）．因此 A'、B'、C' 共线．这就证明了 σ 把射影直线变成射影直线．进而，设 $D=(W_0:W_1:W_2)$是 AB 直线上第 4 个点，于是 $W_i=\lambda' x_i+\mu' y_i$（这里 $i=0, 1, 2$）．如上所证，可知 σ 把点 D 映成 $D'=(W'_0:W'_1:W'_2)$，其中 $W'_i=\lambda' x'_i+\mu' y'_i$（其中 $i=0, 1, 2$）．根据定理 14，我们

知道,

$$(AB|CD)=\frac{\mu}{\lambda}\Big/\frac{\mu'}{\lambda'}=(A'B'|C'D').$$

从而 σ 使复比不变. 这就证明了 σ 是射影变换.

另一方面, 设 τ 是射影变换, 则它把 $A=(1:0:0)$, $B=(0:1:0)$, $C=(0:0:1)$, $D=(1:1:1)$为顶点的四边形变成四边形 $A'B'C'D'$(利用定理 11 验证 A、B、C、D 任三点均不共线, 从而 $ABCD$ 是四边形). 我们只需具体求出一个形如 (3) 式的变换 σ, 使得 σ 将 A、B、C、D 也分别变成 A'、B'、C'、D' 即可. 因为我们知道 τ 和 σ 均把射影直线变成射影直线, 并且保持复比; 它们又同时将 A、B、C、D 分别变成 A'、B'、C'、D', 根据定理 8 证明的后一半可知, 这样的变换是唯一的, 从而 $\sigma=\tau$, 即 τ 是形如 (3) 的变换.

为了寻求一个形如 (3) 式的变换 σ, 使得它将 A、B、C、D 分别变成 A'、B'、C'、D', 我们令 $A'=(a_0:a_1:a_2)$, $B'=(b_0:b_1:b_2)$, $C'=(c_0:c_1:c_2)$, $D'=(d_0:d_1:d_2)$. 用下式定义一个映射 σ:

$$\begin{cases} y_0=\alpha a_0x_0+\beta b_0x_1+\gamma c_0x_2, \\ y_1=\alpha a_1x_0+\beta b_1x_1+\gamma c_1x_2, \\ y_2=\alpha a_2x_0+\beta b_2x_1+\gamma c_2x_2, \end{cases} \tag{3'}$$

其中 α、β、γ 是任意非零实数. 由于 A、B、C 不共线, 它在射影变换 τ 之下变成的 A'、B'、C' 也不共线, 从而行列式

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

不为零(定理11). 而由行列式性质可知，(3′)中的系数行列式是上述行列式的 $\alpha\beta\gamma$ 倍. 即仍不为零. 因此当 $\alpha\beta\gamma\neq 0$ 时，(3′)式定义的映射 σ 是一个变换. 现在我们决定 α、β、γ，使得 σ 把 $D=(1:1:1)$ 变成 $D'=(d_0:d_1:d_2)$，也就是要求：

$$\begin{cases} 1=\alpha a_0+\beta b_0+\gamma c_0, \\ 1=\alpha a_1+\beta b_1+\gamma c_1, \\ 1=\alpha a_2+\beta b_2+\gamma c_2. \end{cases}$$

由于此方程组(α、β、γ 看作未知数)的系数行列式不为零，所以该方程组有唯一解(α, β, γ). 如果 $\alpha=0$，则 $\beta b_i+\gamma c_i=1=d_i$ (这里 $i=0, 1, 2$)，由定理 12 知 B'、C'、D' 共线，这就导致矛盾. 所以 $\alpha\neq 0$. 同样地，$\beta\neq 0$、$\gamma\neq 0$. 对于这组 α、β、γ，变换 σ 把 A、B、C、D 分别变成 A'、B'、C'、D'，于是完全证明了定理 14.

定理 14 表明：射影平面上的射影变换就是形如 (3) 式所定义的那些变换. 有了上面这些代数工具，射影几何问题都可以转化成代数形式，从而也可象解析几何那样，用代数来作射影几何. 但是在本书一开始说过，我们不打算讲过多的代数. 作为本节的结尾，我们只想从代数的角度看一下所有的圆锥曲线为什么是彼此射影等价的.

欧氏平面中的椭圆可以表成

$$a^2x^2+b^2y^2=1. \qquad (a\neq0,\ b\neq0)$$

将$(x,\ y)$改成射影坐标，即

$$x=\frac{x_1}{x_0}、y=\frac{x_2}{x_0},$$

则方程变成

$$x_0^2-a^2x_1^2-b^2x_2^2=0. \qquad (4)$$

由于无穷远点是$x_0=0$的那些点，而$x_0=0$时，$a^2x_1^2+b^2x_2^2=0$没有不全为零的实数解x_1、x_2，所以椭圆上没有无穷远点．作映射σ：$y_0=x_0$，$y_1=ax_1$，$y_2=by_2$．这是形如(3)式的映射，并且系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix}=ab\neq0.$$

从而σ为变换．根据定理14，σ为射影变换．它把上面椭圆变成$y_0^2-y_1^2-y_2^2=0$，再化成直角坐标，即令

$$x=\frac{y_1}{y_0},\quad y=\frac{y_2}{y_0},$$

则为$x^2+y^2=1$，这是单位圆．所以每个椭圆均射影等价于圆、从而所有的椭圆是彼此射影等价的．如果用射影变换：$y_0=x_1$，$y_1=x_0$，$y_2=x_2$

$$\left(\text{其系数行列式}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq0\right),$$

则方程(4)变成方程$y_1^2-a^2y_0^2-b^2y_2^2=0$．化成直角坐标，则为方程$x^2-b^2y^2=a^2$，这是双曲线．从而椭圆射影等价

于双曲线．与椭圆的情形一样，可证：所有的双曲线彼此射影等价，因为它们均射影等价于$y_1^2-y_2^2=y_0^2$(即$x^2-y^2=1$)．双曲线方程$a^2x^2-b^2y^2=1$的射影形式为$a^2x_1^2-b^2x_2^2=x_0^2$(其中$a\neq0$, $b\neq0$)．取$x_0=0$，则$ax_1=\pm bx_2$．因此，在这个双曲线上有两个无穷远点$(0:b:-a)$和$(0:b:a)$．它们分别是该双曲线渐近线$ax+by=0$和$ax-by=0$（即射影直线$[0:a:b]$和$[0:a:-b]$）上的无穷远点．最后，抛物线方程为$y=ax^2$(其中$a\neq0$)．类似可证它们均射影等价于抛物线$y=x^2$(其射影形式为$x_0x_2=x_1^2$)．作射影变换：$y_0=x_0+x_2$, $y_2=x_0-x_2$, $y_1=x_1$

$$\left(\text{其系数行列式}\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=-2\neq0\right),$$

则方程变为$y_0^2=4y_1^2+y_2^2$．这是椭圆$4x^2+y^2=1$．这就最后证明了所有的圆锥曲线均射影等价．（注意抛物线$x_0x_2=x_1^2$上只有一个无穷远点$(0:0:1)$，它是此抛物线$y=x^2$的对称轴$x=0$(即射影直线$[0:1:0]$)上的无穷远点．）

练习题（七）

1．写出下列射影直线的射影坐标：

(a) 通过点$(1:0:0)$和$(0:1:0)$；

(b) 通过点$(0:1:1)$并且与直线$[1:1:1]$交于无穷远点．

2．(a) 求直线$[1:1:1]$和$[1:1:0]$的交点．

(b) 写出射影直线[1:0:1]上的无穷远点.

3. (a) 求证：四条射影直线 $a=[1:2:-1]$, $b=[-2:3:1]$, $c=[0:-7:1]$和 $d=[-1:5:0]$交于一点.

(b) 求上面四线组成的线束的交比

$$(ab|cd).$$

4. 求射影变换，将(1:0:1), (0:1:1), (1:1:1)和(0:0:1)分别变为(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1)和(1:1:1).

5. 设 $A=(a_0:a_1:a_2)$, $B=(b_0:b_1:b_2)$是两个不同点，求射影直线 AB 与$[c_0:c_1:c_2]$的交点.

6. 过点 $P=(-2:1:2)$作圆锥曲线 $x_0x_2=x_1^2$ 的切线，求切点和切线的射影坐标.

7. 求射影变换将[1:0:1], [0:1:1], [1:1:1] 和 [0:0:1]分别变成[1:0:0], [0:1:0], [0:0:1]和[1:1:-1].

5. 对 偶 原 理

——射影几何的内在美

我们在本节向大家介绍射影几何又一个美丽之处——对偶性. 在上一节，我们把平面射影几何当中的基本概念(如点，射影直线，射影变换，复比，三点共线，三线共点等)均表达成代数形式. 我们也说过，它的好处在于可以把几何问题归结于代数形式，从而为利用代数工具解决射影几何问题提供了可能性. 事实上，它还有另一个好处：点和射影直线这两类完全不同的几何图形可以用完全相同的代数

形式(即射影坐标)来表达，只是为了区别它代表点还是代表射影直线，一个采用圆括号而另一个采用方括号. 不仅如此，让我们看看上节的定理 11、12 和 13. 在这三个定理中关于点和直线的两个命题 (1) 和 (2) 在形式上非常相似. 确切来说，我们只要把"点"改成"射影直线"(于是射影坐标的圆括号也自然改为方括号)，"共线"改成"共点"，"点列"改成"线束"，那么每个定理的命题 (1) 均变成了命题 (2). 同样地，如果把"射影直线"改成"点"，"共点"改成"共线"，"线束"改成"点列"，那么命题 (2) 变成了命题 (1)，我们称"点"和"射影直线"这两个概念是彼此对偶的，同样地，"共线"和"共点"，"点列"和"线束"也是彼此对偶的. 又比如："点 $(x_0:x_1:x_2)$ 在直线 $[a_0:a_1:a_2]$ 上"与"直线 $[x_0:x_1:x_2]$ 过点 $(a_0:a_1:a_2)$"也是彼此对偶的，并且它们都相当于 $a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2=0$ 成立. 一般地，如果设 P 是一个命题，它只涉及射影几何中的概念和射影不变性质，那末将命题 P 中所有概念改成与它对偶的概念之后，所得到的新的命题 P' 叫作是原命题 P 的对偶命题. 显然，这时命题 P' 的对偶命题就是命题 P，从而 P 和 P' 是相互对偶的. 所谓对偶性原理是说：

射影几何中的两个相互对偶的命题中如果一个正确，则另一个也正确.

根据这个原理，定理 11、12、13 中，我们只需要证明其中一个命题即可. 同样地，本书第 38 页中的定理 1 和定理 1′ 是彼此对偶的. 德沙格定理和它的逆定理是相互对偶

的，第59页中定理7和第65页中的定理7′也是彼此对偶的，所以它们也都只需证明其中的一个。我们还可以利用对偶性原理发现一些新的定理。例如将第31页的帕普斯定理对偶，就得到下面的定理：

定理（帕普斯定理的对偶） 设L和L'是两个不同的点。a、c、e是过L的三条射影直线，b、d、f是过L'的三条射影直线。如果a和b的交点与e和d的交点连成射影直线x，e和f的交点与b和c的交点连成射影直线y，a和f的交点与c和d的交点连成射影直线z，则x、y、z共点。

将本书第51页中的定理4和第52页中的定理5对偶，我们又得到如下的定理：

定理4′ 设L和L'是射影平面上两个不同的点，a、b、c、d和a'、b'、c'、d'分别是以L和L'为中心的两个线束。如果a和a'的交点，b和b'的交点，c和c'的交点在同一射影直线p上，则d和d'的交点也在p上的充分必要条件是$(ab|cd)=(a'b'|c'd')$。

定理5′ 设L和L'是两个不同的点，p为射影直线LL'。p、a、b、c和p、a'、b'、c'分别是以L和L'为中心的线束。如果$(pa|bc)=(pa'|b'c')$，则a和a'的交点，b和b'的交点，c和c'的交点共线。

而定理8的对偶是：

定理8′ 设a、b、c、d是射影平面上四条射影直线，并且其中任意三条均不共点。又若a'、b'、c'、d'也是这样

的四条射影直线，则存在唯一的射影变换，把 a、b、c、d 分别变成 a'、b'、c'、d'.

本书第 33 页的例 4，有如下的对偶.

定理 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是射影直线 O 上的一个点列($n\geqslant 3$). n 边形依次相邻的 n 条边 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 分别过点 $X_1, X_2, \cdots, X_n$. 如果 a_1 和 a_2 的交点，$\cdots$，a_{n-1} 和 a_n 的交点分别在给定的射影直线 $p_1, p_2, \cdots, p_{n-1}$ 上，则 a_n 和 a_1 的交点也在某给定直线上.

除了上述对偶之外，射影几何中还有另外一种对偶：**配极对偶**. 首先要讲一下什么是关于一个圆锥曲线的**配极**，让我们先从最简单的圆锥曲线——圆的情形谈起.

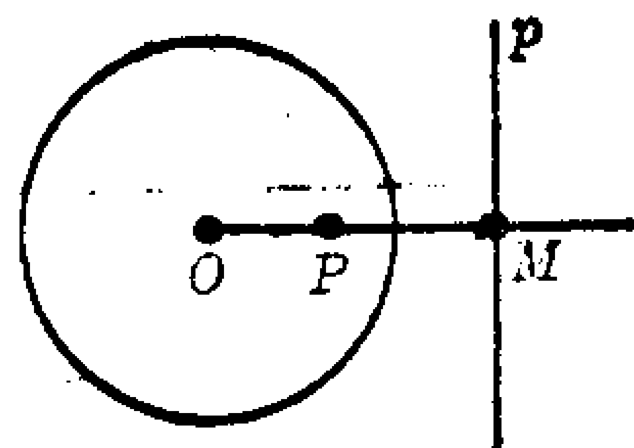


图 2-30

设 Ω 是半径为 r 的圆，圆心为 O. 给了任意一点 $P\neq O$，在射线 OP 上取点 M，使 $OP\cdot OM=r^2$. 过 M 作 OM 的垂线 p. 我们称射影直线 p 是点 P 关于圆 Ω 的**极线**，而点 P 是射影直线 p 的**极点**(图 2-30). 因此，求 p 的极点 P 的办法是：过圆心 O 作直线与 p 垂直并且设垂足为 M，在射线 OM 上求点 P 使得 $OP\cdot OM=r^2$，则点 P 即为 p 的极点. 我们把 P 与 p 之间的这种对应叫作关于圆 Ω 的**配极对应**.

不难看出：当 P 在圆外时，M 在圆内，从而 P 的极线 p 为圆 Ω 的割线；当 P 在圆内时，p 与圆 Ω 不相交；当 P 在圆 Ω 上时，p 为圆 Ω 过点 P 的切线. 当点 P 愈来愈接近

圆心 O 时，它的极线 p 离圆心 O 愈来愈远．所以自然把无穷远直线看成是圆心 O 的极线(于是圆心 O 是无穷远直线的极点)．类似地，设 P 是普通直线 l 上一点．当 P 趋近于该直线上的无穷远点 P' 时，则 OP' 是过圆心 O 与 l 平行的直线，而 OM 趋近于零，即 M 趋近于 O．从而点 P' 的极线 p' 就是过圆心 O 与 l 垂直的射影直线(图 2-31)．换句话说，过圆心 O 的射影直线的极点是与该直线垂直的直线上的无穷远点．

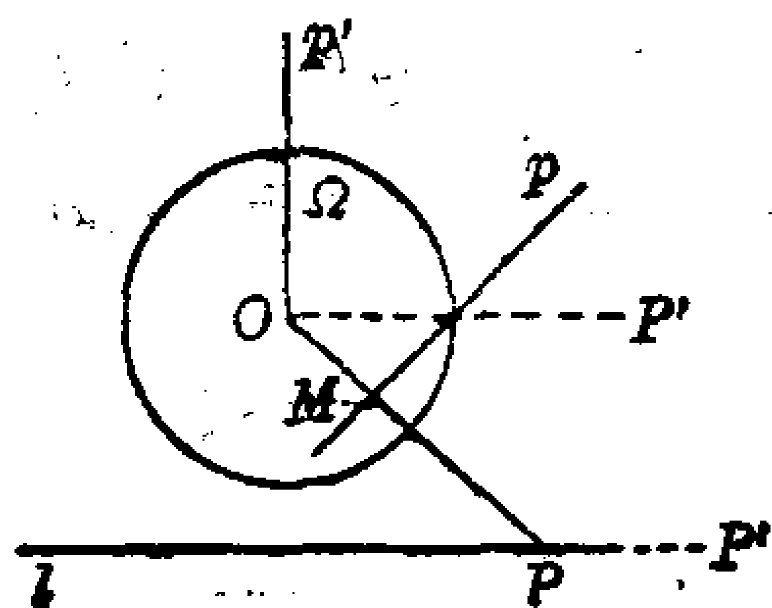


图 2-31

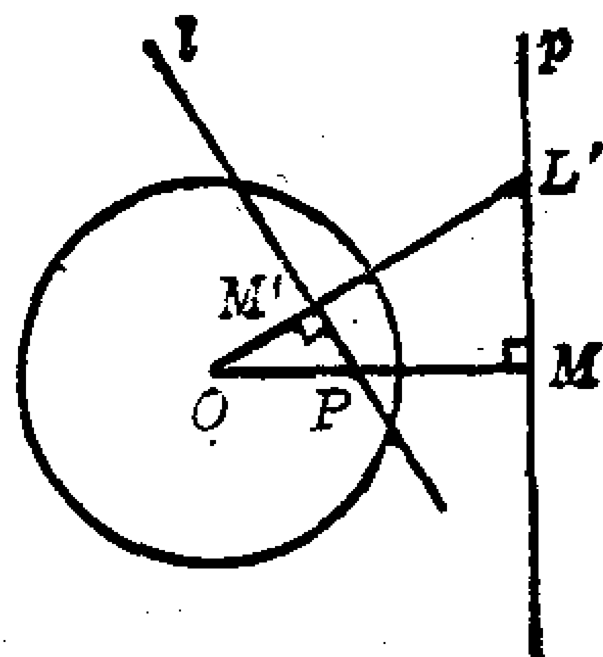


图 2-32

配极变换的最基本性质是：

性质一 设点 P 和 L 关于圆 Ω 的极线分别为 p 和 l。若点 P 在 l 上，则点 L 在 p 上．

证明 过圆心 O 作直线垂直于 l，并且与 l 和 p 分别相交于 M' 和 L'(图 2-32)．则 $OP\cdot OM=OL'\cdot OM'$．因此点 L' 正是 l 的极点 L，即 L 在 p 上．以上是 p 和 l 均不为无穷远直线也不为过圆心直线的情形．利用连续性原理即知：p 或 l 为无穷远直线，或过 O 直线时，性质一仍然成立．

性质二 (1) 设点 P_1、P_2 和 L 关于圆 Ω 的极线分别

为 p_1、p_2 和 l，则 l 是点 P_1 和 P_2 的连线，当且仅当 L 是 p_1 和 p_2 的交点.

(2) 设点 P_1, P_2, P_3 关于圆 Ω 的极线分别为 p_1、p_2、p_3，则 P_1、P_2、P_3 共线的充分必要条件是 p_1、p_2、p_3 共点.

证明 由性质一，即可直接推出性质二.

我们关于圆 Ω 的配极对应的上述定义，是不能推广到一般圆锥曲线 Ω 上的，因为定义中利用了直线垂直性和线段长度关系 $OP\cdot OM=r^2$，这些都不是射影不变性质. 但是利用上面的性质二，我们可以给出关于圆的配极对应的新的刻划方式：

定理 15 令 p 是点 P 关于圆 Ω 的极线.

(1) 如果 P 在圆 Ω 外，过 P 作圆 Ω 的两条切线 l_1 和 l_2，则 p 即是两个切点 L_1、L_2 的连线.

(2) 如果 P 在圆上，则 p 即是过 P 的切线.

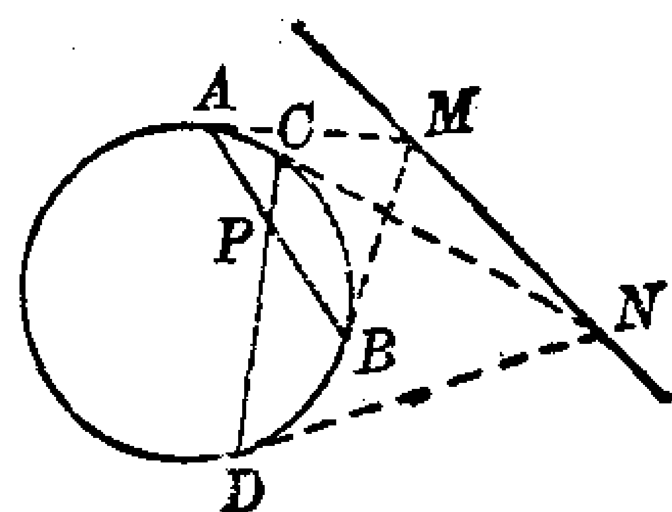


图 2-33

(3) 如果 P 在圆内，过 P 作一条直线与圆 Ω 交于点 A、B. 过 A、B 作圆 Ω 两切线，交于 M. 过 P 作另一条直线，与圆 Ω 交于 C、D. 过 C、D 作圆 Ω 两切线，交于 N. 则 p 即是直线 MN(图 2-33).

证明 (2) 是显然的. (1) 是因为：根据(2)，L_1 和 L_2 分别是 l_1 和 l_2 的极点. 从而由性质二可知 L_1 和 L_2 的连线即是 l_1 和 l_2 的交点 P 的极线 p. (3) 是因为：根据 (1)，M 和 N 分别是 AB 和 CD 的极点，从而由性质二可知 MN

为 AB 和 CD 的交点 P 的极线 p. 证毕.

将定理 15 换一个说法，便得到极点的如下定义方式：

定理 15′ 设点 P 是射影直线 p 关于圆 Ω 的极点.

(1) 如果 p 与圆 Ω 交于两点 L_1、L_2，则 P 是该圆过 L_1 和 L_2 的两切线的交点.

(2) 如果 p 是圆 Ω 的切线，则 P 即是此切线的切点.

(3) 如果 p 与圆 Ω 不相交，在 p 上任取两点 M、N，过 M 作圆 Ω 两切线，其切点为 A、B；过 N 作圆 Ω 两切线，其切点为 C、D，则 P 为 AB 和 CD 的交点.

由定理 15 和 15′，我们立刻证明关于圆锥曲线的如下性质：

定理 16 设三条射影直线 AA'、BB'、CC' 与圆锥曲线 Ω 相割，交点为 A、A'、B、B'、C、C'. 过 A 和 A' 作 Ω 的切线交于 P，过 B 和 B' 作切线交于 Q，过 C 和 C' 的切线交于 R，则 AA'、BB'、CC' 共点的充分必要条件是 P、Q、R 共线.

证明 由于定理中涉及的均是射影不变性质，所以我们不妨设 Ω 是圆. 这时，P、Q、R 三点分别为 AA'、BB'、CC' 的极点. 于是定理由性质二推出. 证毕.

由于定理 15 和 15′ 均只涉及射影不变性质，所以可以把它们作为关于任意圆锥曲线 Ω 的配极对应的定义，只需其中“圆”改成“圆锥曲线”. 此外，我们还需要说明以下两点：

(a) 用这个定义，我们还需要弄清什么是圆锥曲线 Ω

的内部和外部．对于圆(或椭圆)，外部一点可以作该圆两条切线(或者：可以作一条射影直线与该圆不相交)，这是射影不变性质，所以对于一般的圆锥曲线 Ω，我们也可以把 Ω 的外部点定义为可作 Ω 两条切线的那些点．类似地，Ω 的内部点即是不能引出 Ω 的切线(或：过此点的任意直线均与 Ω 交于两点)的那些点．图 2-34 中阴影部分便是圆锥曲线 Ω 的内部．

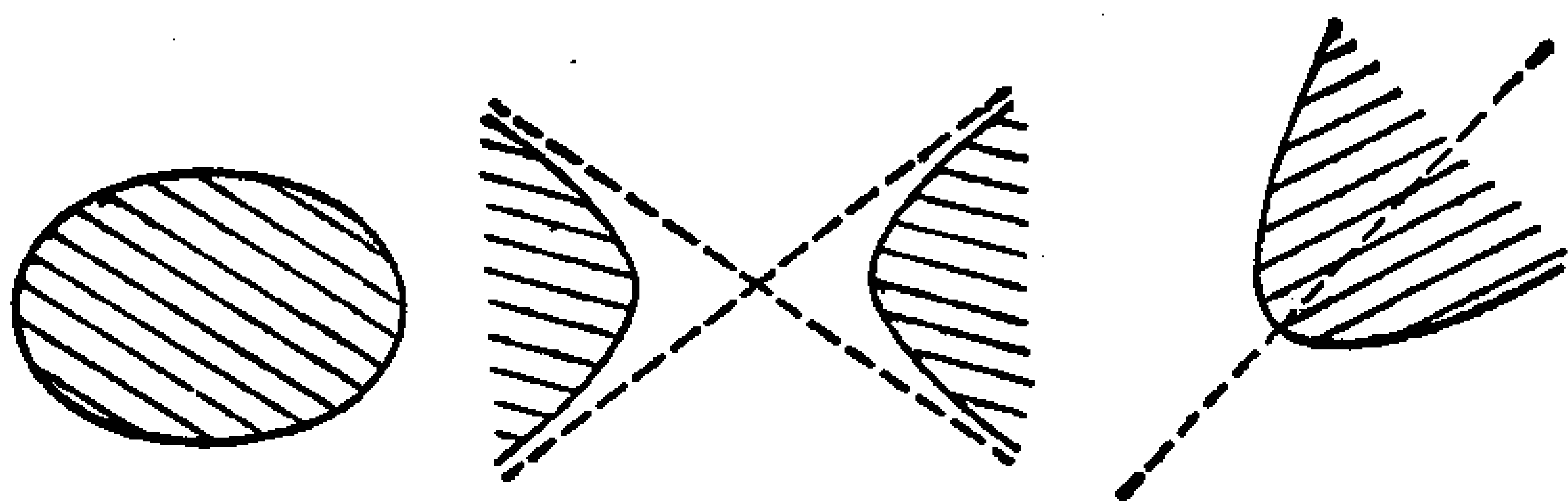


图 2-34

(b) 当点 P 在圆锥曲线 Ω 的内部时，如果用定理 15 的 (3) 来定义点 P 的极线 p．表面看来，它与割线 AB 和 CD 的选取有关．但是若再取过点 P 的另一条割线 EF，它与 Ω 交于 E、F 两点．Ω 在 E、F 点的两切线交于 R．由于 AB、CD、EF 均过点 P，根据定理 16，M、N、R 共线，即 R 在 MN 上，从而 P 的极线 MN 不依赖于割线 AB 和 CD 的取法，即由此定义的 P 的极线是唯一确定的．同样地，当直线 p 与圆锥曲线不相交时，由定理 15′ 的 (3) 所定义的 p 的极点 P 也是唯一确定的．

关于圆的配极对应所具有的性质一和性质二也是关于一般圆锥曲线的配极对应所具有的性质，因为这些性质只涉及射影不变性；而且这两个性质显然也反映了一种对偶

性，我们姑且把它称之为**配极对偶性**．形象地说：关于一个圆锥曲线作配极对应，那末极点和极线是彼此配极对偶的两个概念．“二点连线”和“二线交点”；“三点共线”和“三线共点”也是彼此配极对偶的概念．设 S 是与某圆锥曲线 Ω 有关的一个命题．如果将命题 S 中的概念均变为对于 Ω 的那些配极对偶概念(例如：某点 P 或某射影直线 l 分别变为它们关于 Ω 的极线 p 或极点 L，点 P_1 和 P_2 的连线变成此连线的极点，即 P_1 和 P_2 之极线的交点，等等)，则就得到一个新的命题 $\hat{S}$．我们称 $\hat{S}$ 为 S 的**配极对偶命题**．性质一和性质二表明：命题 S 和 $\hat{S}$ 若有一个成立，则另一个也成立．

最著名的例子是帕斯卡定理的配极对偶．圆锥曲线 Ω 上六个点的极线是过此六点的(Ω 的)六条切线．它们围成 Ω 的外切六边形．换句话说，Ω 的内接六边形 $ABCDEF$ 和外切六边形 $abcdef$ 关于 Ω 是配极对偶的两个图形，其中顶点 A、B、C、D、E、F 的极线分别是 a、b、c、d、e、f，而直线 AB 对应 a 和 b 的交点，如此等等．我们就得到帕斯卡定理的配极对偶定理，它是著名的布里安桑(Ch. J. Brianchon, 1785?—1864)定理．

布里安桑定理 设 A、B、C、D、E、F 是某圆锥曲线外切六边形的六个顶点，则 AD、BE、CF 共点(图 2-35)．

注意：我们在本书第 55 页中采用复比证明帕斯卡定理时，曾经说过：在帕斯卡定理中，圆锥曲线 Ω 上的六个顶点 A、B、C、D、E、F 可以采取任意的次序，所以在布里安桑

定理中，Ω 的外切六边形的六个顶点 A、B、C、D、E、F 也可采取任意次序．我们在本书第 41 页中，利用连续性原理可以从帕斯卡定理得到很多新的定理(定理 A、B、C、D、E)．将定理 A、B、C 作配极对偶(或者对于布里安桑定理利用连续性原理)，便可得到许多新的定理．例如，定理 C 的配极对偶定理为

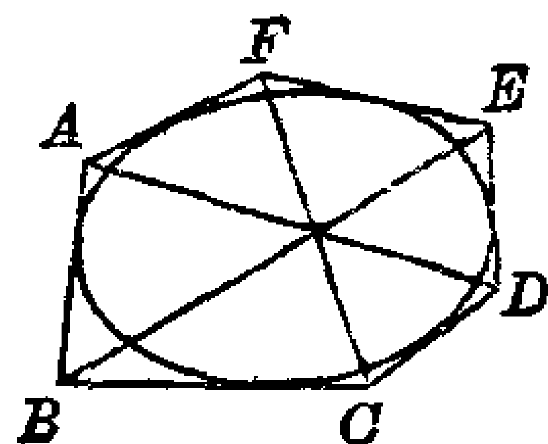


图 2-35

定理 C′ 设 $\triangle ACE$ 是圆锥曲线的外切三角形．边 AC、CE、EA 的切点分别为 E'、A'、C'，则 AA'、CC'、EE' 共点．

请大家写出定理 A 和定理 B 的配极对偶．

下一个定理表明：点列复比和线束复比也是配极对偶的两个概念．

定理 17 设点 P 关于圆锥曲线 Ω 的极线为 p，则过点 P 的四条射影直线 a、b、c、d 的极点 A、B、C、D 为直线 p 上的四个点，我们有：$(ab|cd)=(AB|CD)$．

证明 由于定理只涉及射影不变量，我们不妨可设 Ω 是圆．过圆心 O 作直线 OA、OB、OC、OD，则它们与 a、b、c、d 分别垂直．因此

$$(ab|cd)=(OA,\ OB|OC,\ OD)=(AB|CD).$$

关于圆锥曲线的配极与复比相联系还有许多奇妙的性质，我们将在下节作进一步介绍．

练习题(八)

1．写出本书第 41 页定理 A、B 以及第 48 页练习题 3

的配极对偶定理.

2. 写出本书第82页练习题第5题的对偶和它的解.

3. 写出本书第67页练习题第5题的对偶命题.

4. 过圆锥曲线Ω外一点A,作直线l, 与Ω交于两点C和D,点A关于Ω的极线m与l交于B,求证$(AB|CD)=-1$.

5. 设Ω是圆锥曲线, 试决定无穷远直线关于Ω的极点.

6. 再谈奇妙的圆锥曲线

现在我们再谈圆锥曲线的一些奇妙的性质. 让我们从第2节的定理6讲起. 这个定理是说(参见图2-13), 如果A、B、C、D、P、P'是某圆锥曲线Ω上六个不同的点,则$(PA, PB|PC, PD)=(P'A, P'B|P'C, P'D)$. 换句话说, 设$A$、$B$、$C$、$D$是某圆锥曲线$\Omega$上给定的四个不同的点, 对于圆锥曲线$\Omega$上任意一个另外的点$P$, $(PA, PB|PC, PD)$是与P的选取无关的一个定值. 我们今后将这个只依赖于Ω上A、B、C、D四点的定值表示成$((AB|CD))$. 下面定理是这一定理的逆.

定理18 设A、B、C、D是圆锥曲线Ω上四个不同的点, P是射影平面上另外一个点. 如果$(PA, PB|PC, PD)=((AB|CD))$,则$P$点必在$\Omega$上.

证明 设P不在Ω上. 则P与A、B、C、D中某个点

的连线必是Ω的割线(因为过P最多能引Ω的两条切线).不妨设PC是Ω的割线. 除C之外,设PC与Ω的另一交点为Q. 由于P不在Ω上,从而$P\neq Q$. 设BP和BQ与AD分别交于B'和B''. 由于$P\neq Q$, 从而$B'\neq B''$. 再令CP与AD交于C',则$(PA, PB|PC, PD)=(AB'|C'D)\neq(AB''|C'D)=(QA, QB|QC, QD)=((AB|CD))$. 这与假设$(PA, PB|PC, PD)=((AB|CD))$相矛盾. 因此, 若$(PA, PB|PC, PD)=((AB|CD))$, 则$P$必然在$\Omega$上. 证毕.

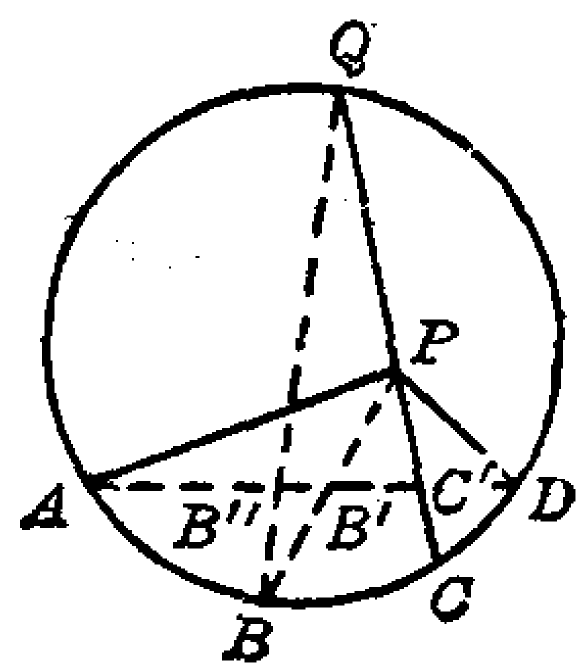


图 2-36

我们在平面几何中知道, 圆由其上三个不同的点A、B、C所完全决定, 因为圆是满足$\angle ADB=\angle ACB$的点D的轨迹. 类似地, 给了圆锥曲线上五个点A、B、C、D、E, 则上面我们证明了Ω就是满足$(FA, FB|FC, FD)=(EA, EB|EC, ED)$的点$F$的轨迹. 从而$\Omega$由其上五个不同的点所唯一决定.

现在我们给了圆锥曲线Ω上五个不同的点P、Q、A、B、C,则这五个点的任意三个点均不共线(因为每条射影直线与Ω至多只交于两点). 根据第3节的定理8, 存在(唯一的)射影变换σ, 把A、B、C不动而把P变为Q. 假设过P的一条直线与Ω交于D, 于是$(PA, PB|PC, PD)=(QA, QB|QC, QD)$, 从而由$\sigma$保

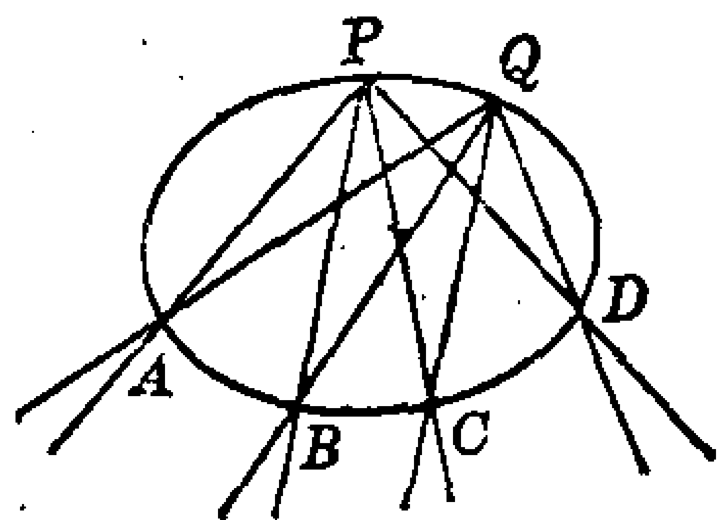


图 2-37

持复比，可知σ把PD变为QD. 因此，Ω即为σ之下的两组对应线束的对应直线交点的轨迹(图 2-37). 换句话说，**对于每个圆锥曲线Ω，均存在一个射影变换σ和一个线束，使Ω是此线束和它通过σ变成的线束的对应直线交点的轨迹. 通常把这叫作是圆锥曲线的射影定义.**

下面是圆锥曲线另一些有趣性质.

定理 19 设I和J是圆锥曲线Ω上两点. Ω在点I和J的切线交于O. 过O作直线AB和CD与Ω分别交于A、B和C、D, 则AD、CB的交点P和AC、BD的交点Q均在直线IJ上(图 2-38).

证明 我们将直线CD固定，而AB变动. 将$ACDB$看成是Ω的内接六边形，其中C和D均是此六边形的二重顶点. 根据本书第48页的练习题第3题可知P、Q、R共线，其中R是Ω过C和D两切线的交点. 同样地，设Ω过A和B两切线交点为S, 则S、P、Q共线. 于是S、R、P、Q四点共线(图 2-39).

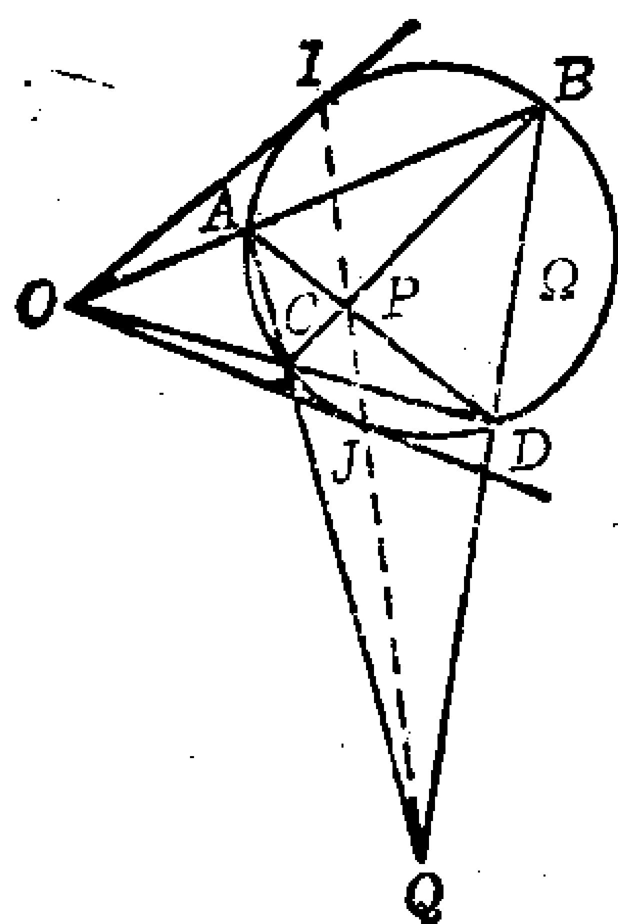


图 2-38

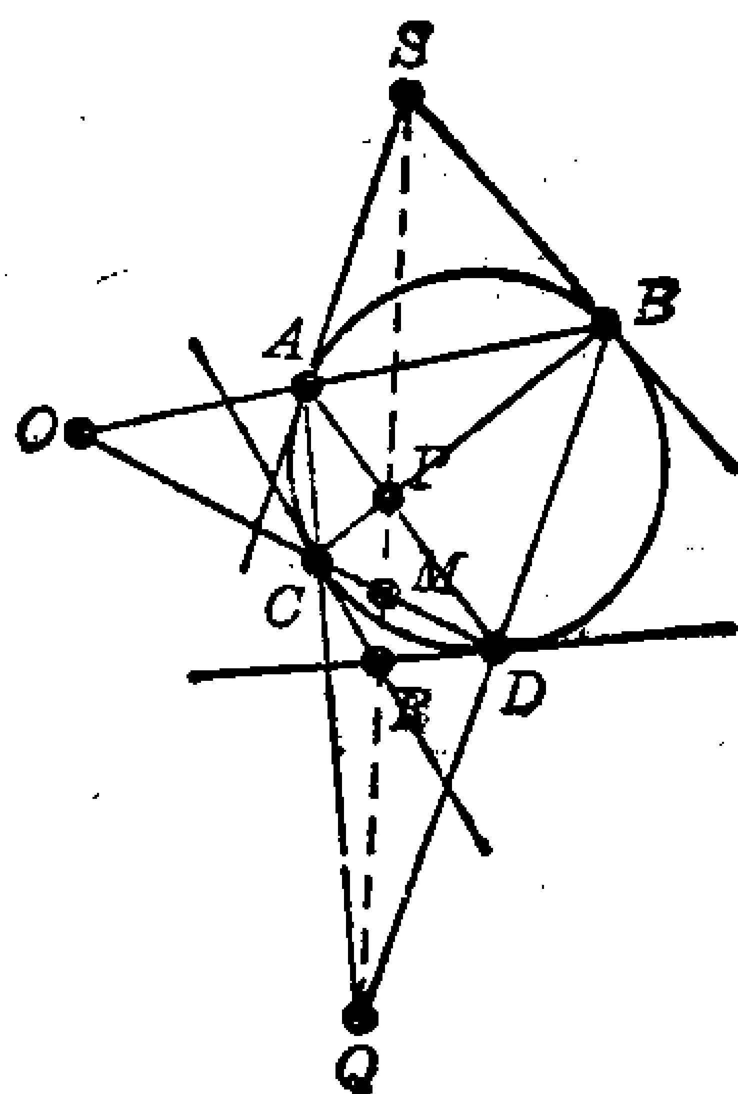


图 2-39

考虑完全四边形 $CQDPBA$. 设 CD 与 PQ 交于 M, 则 $(CD|MO)=-1$. 由于 O、C、D 均为定点, 从而 M 也是定点. 但是 R 也是定点, 从而 MR 是定直线. 于是, 当直线 AB 绕其上点 O 转动时, P、Q、S 均在定直线 MR 上活动. 当 AB 活动成直线 OI 时, 点 P 和点 S 均与点 I 一致. 于是, 由连续性原理即知 I 在直线 MR 上. 同样地, J 也在 MR 上. 于是 MR 即为直线 IJ. 从而 P 和 Q 均在 IJ 上. 证毕.

定理 20 过圆锥曲线 Ω 外部一点 P 作四条直线, 与 Ω 分别交于 A, A'; B, B'; C, C'; D, D'. 则

$$((AB|CD))=((A'B'|C'D')).$$

证明 过 P 作 Ω 的两条切线, 其切点为 I 和 J. 设 BA', BB', BC', BD' 与 IJ 分别交于 L, M, N, T, 根据定理 19 可知 $B'A$、$B'B$、$B'C$、$B'D$ 与 IJ 的交点也分别是 L、M、N、T (图 2.40). 于是 $((AB|CD))=(B'A, B'B|B'C, B'D)=(LM|NT)=(BA', BB'|BC', BD')=((A'B'|C'D'))$. 证毕.

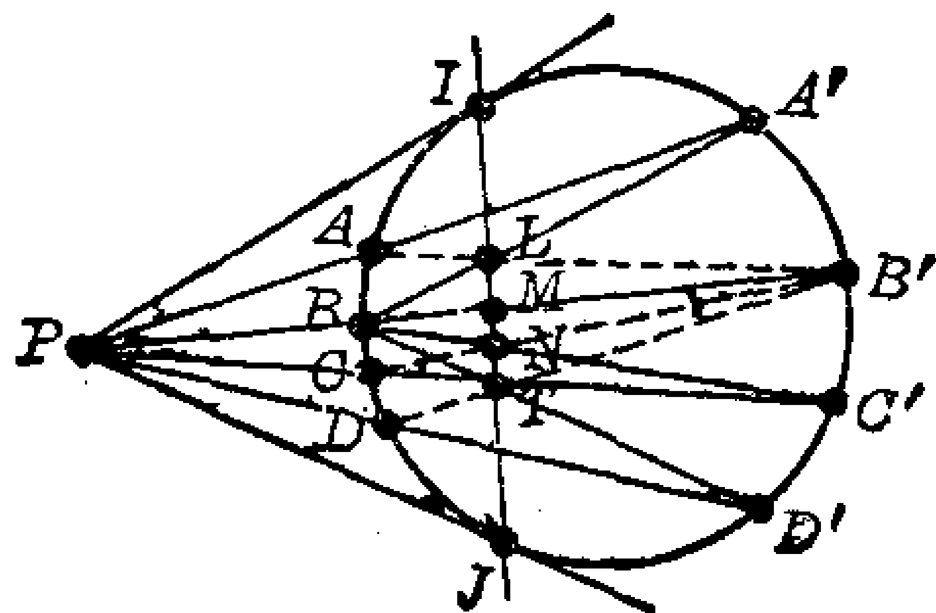


图 2-40

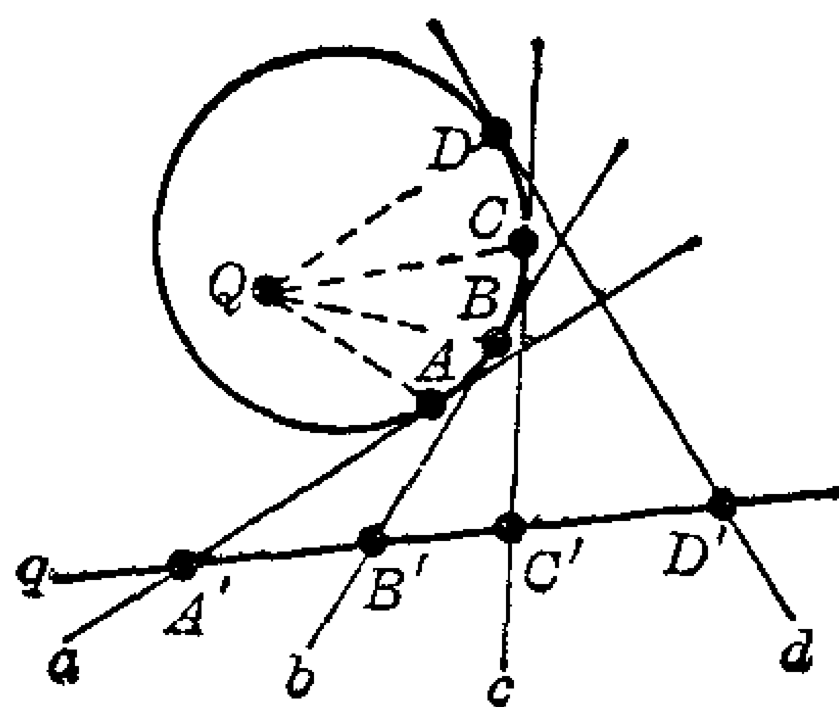


图 2-41

定理 21 如图 2-41，设 A、B、C、D 为圆锥曲线 Ω 上四点，a、b、c、d 分别是以这四点为切点的切线. 如果射影直线 q 与 a、b、c、d 分别交于点 A'、B'、C'、D'，则 q 为 Ω 的切线当且仅当 $(A'B'|C'D')=((AB|CD))$.

证明 设 Q 是 q 的极点. 于是，由前节定理17可知 $(A'B'|C'D')=(QA, QB|QC, QD)$，这是因为 QA、QB、QC、QD 的极点分别是 A'、B'、C'、D'. 于是：q 为 Ω 的切线 $\Longleftrightarrow Q$ 在 Ω 上 $\Longleftrightarrow (QA, QB|QC, QD)=((AB|CD)) \Longleftrightarrow (A'B'|C'D')=((AB|CD))$. 证毕.

注：定理 21 可以看成是定理 18 的配极对偶.

作为上述诸定理的一个应用，我们证明

定理 22（彭色列闭形定理） 设椭圆 Ω_2 在椭圆 Ω_1 的内部. $\triangle ABC$ 是 Ω_1 的内接三角形和 Ω_2 的外切三角形. 过 Ω_1 上任意一点 A' 作 Ω_2 的两条切线与 Ω_1 分别交于 B' 和 C'. 则 $B'C'$ 也为 Ω_2 的切线.

证明 设 $B'C'$ 与 AB 和 AC 分别交于 P 和 Q，BC 与 $A'B'$ 和 $A'C'$ 分别交于 T 和 S，则：$(BS|TC)=(A'B, A'C'|A'B', A'C)=(AB, AC'|AB', AC)=(PC'|B'Q)$. 但是 AB、$A'C'$、$A'B'$、AC 是椭圆 Ω_2 的四条切线，它们与 $B'C'$ 所截出的点列复比 $(PC'|B'Q)$ 等于与 BC 所截出的点列复比 $(BS|TC)$. 由于 BC 是 Ω_2 的切线，根据定理 21 即知 $B'C'$ 也是 Ω_2 的切线. 证毕.

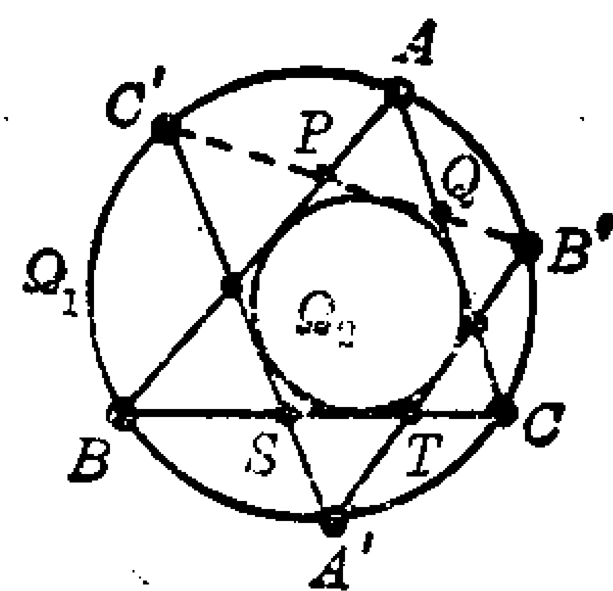


图 2-42

下面一个定理也是很美丽的.

定理 23(夏尔定理) 设三点 A、B、C 关于圆锥曲线 Ω 的极线分别为 α、β、γ. β 和 γ 交于点 A'; γ 和 α 交于点 B'; α 和 β 交于点 C'. 则 AA'、BB'、CC' 共点.

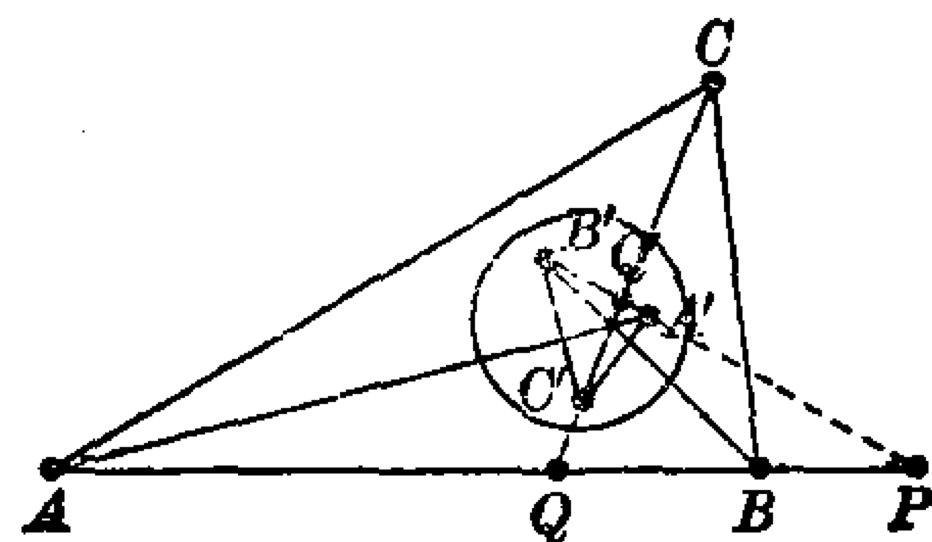


图 2-43

证明 由假设和配极的性质, 可知 A'、B'、C' 的极线分别为 BC、CA、AB. 假设 AB 和 $A'B'$ 的交点为 P, CC' 和 AB 交于点 Q, CC' 和 $A'B'$ 交于点 Q'(图 2-43), 则 P、Q 和 Q' 的极线分别为 $Q'C'$、PC' 和 PC. 考虑 AB 线上的点列 A、B、P、Q. 它的配极对偶是以 C' 为中心的线束 $C'B'$、$C'A'$、$C'Q'$、$C'P$. 从而 $(BA|QP)=(AB|PQ)=(C'B',C'A'|C'Q',C'P)=(B'A'|Q'P)$. 根据本书第 52 页定理 5, 即知 AA'、BB' 和 QQ'(即 CC')共点.

在本节的最后, 我们再介绍关于"自配极三角形"的两个优美的定理.

定理 24 设 $PQRS$ 是圆锥曲线 Ω 的内接四边形. 对角线 QS 和 RP 交于 B, 对边 RQ 和 SP 交于 A, 对边 PQ 和 SR 交于 C, 则 $\triangle ABC$ 是自配极三角形. 也就是说: A、B、C 关于 Ω 的极线分别是它们的对边 BC、CA、AB.

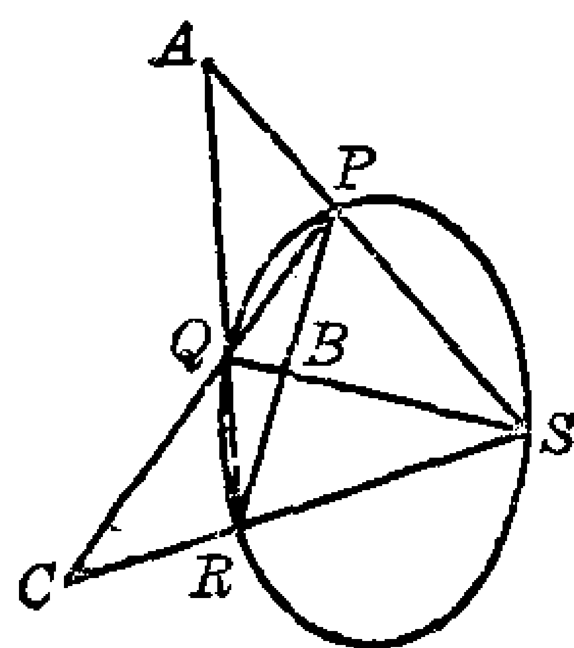


图 2-44

证明 根据定理 19, 我们知道, 直

线 AB 与 Ω 的两个交点恰好是过 C 作 Ω 两条切线的切点，从而 AB 是 C 的极线. 同样地，BC 是 A 的极线. 再由配极的性质，即知 AC 是 BC 和 AB 的交点 B 的极线. 证毕.

定理 25 设 $PQSR$ 是圆锥曲线 Ω 的外切四边形. 对角线 PR 和 SQ 交于 B，对边 RQ 和 SP 交于 A，对边 PQ 和 SR 交于 C，SQ 与 AC 交于 E，RP 与 AC 交于 D. 则完全四边形三条对角线 PR、SQ 和 AC 所围成的三角形 BDE 是关于 Ω 的自配极三角形(图 2-45).

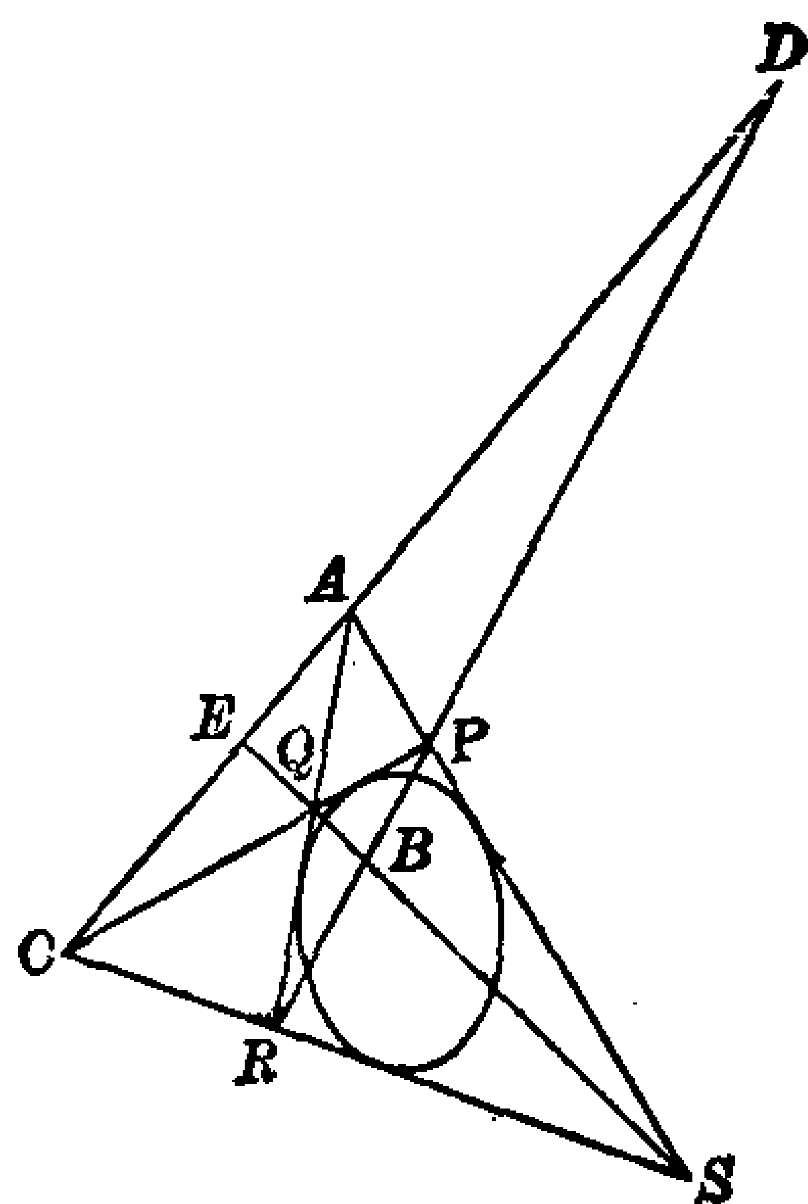


图 2-45

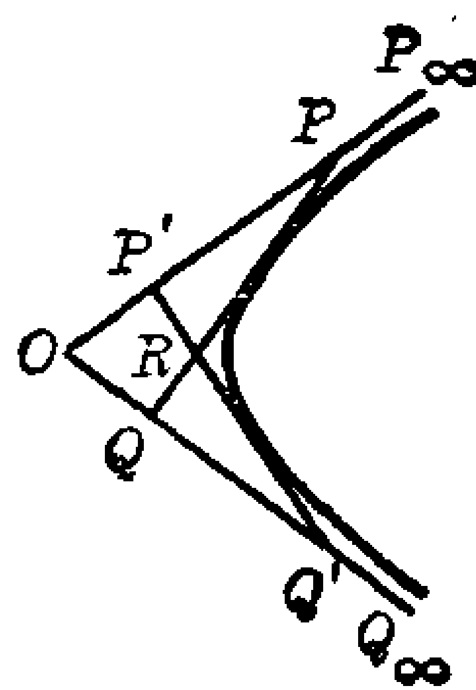


图 2-46

证明 这是定理 24 的配极对偶定理.

作为定理 25 的应用，我们来证明

定理 26 设 O 是双曲线 Ω 的中心(即两叶双曲线的对称中心，图 2-46 只画了双曲线的一叶)，PQ 和 $P'Q'$ 是双曲线 Ω 的两条切线，PQ 与 Ω 的两条渐近线分别交于 P 和

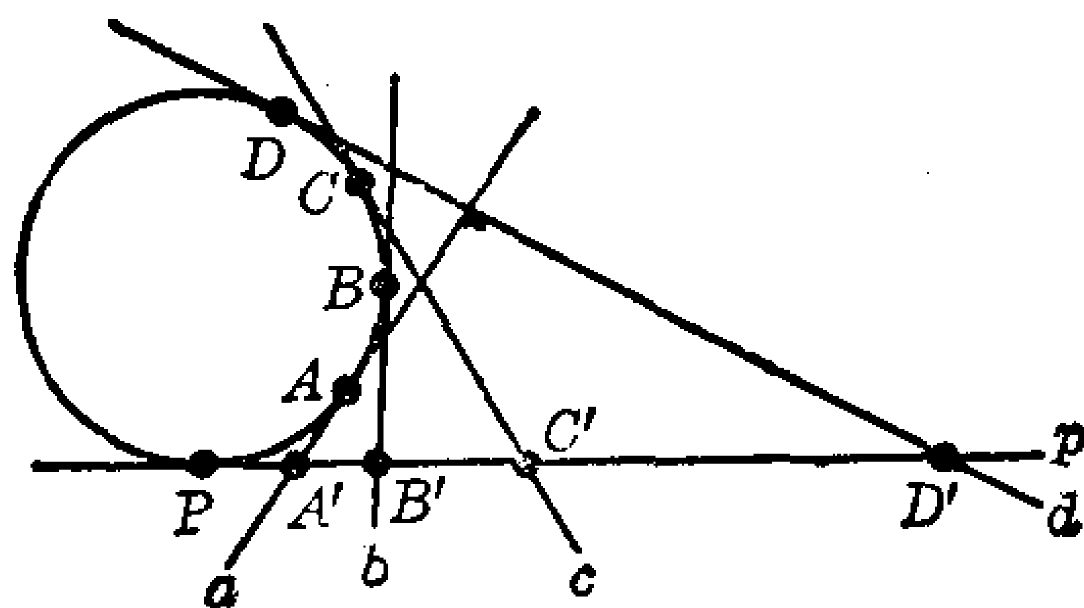
Q，而 $P'Q'$ 与两条渐近线分别交于 P' 和 Q'. 则 $\triangle OPQ$ 的面积等于 $\triangle OP'Q'$ 的面积.

证明 设 PQ 和 $P'Q'$ 交于 R，则四边形 $OPRQ$ 是 Ω 的外切四边形. 根据定理 25，对角线 OR、$P'Q$ 和 PQ' 围成自配极三角形. 于是，$P'Q$ 和 PQ' 的交点应当是 OR 的极点. 另一方面，中心 O 作 Ω 两条切线的切点是两条渐近线的无穷远点 P_∞ 和 Q_∞（图 2-46），从而无穷远直线 $P_\infty Q_\infty$ 是 O 的极线. 因此 OR 的极点应当在无穷远直线上，也就是说，OR 的极点应当是无穷远点. 于是 $P'Q$ 和 PQ' 的交点应当是无穷远点，即在欧氏平面中 $P'Q /\!/ PQ'$，从而 $\triangle OPQ$ 的面积等于 $\triangle OP'Q'$ 的面积. 证毕.

这个定理也可简述为：双曲线的一条切线和两条渐近线所围成的三角形的面积是一个常量.

练 习 题（九）

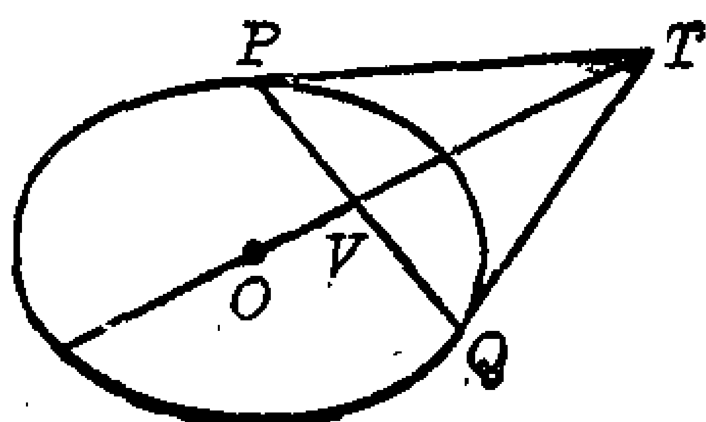
1. 设 A、B、C、D 是圆锥曲线 Ω 上四点，a、b、c、d 分别是 Ω 过这四点的切线. P 是 Ω 上任意一点，Ω 过 P 的切线与 a、b、c、d 分别交于点 A'、B'、C'、D'，求证 $(A'B'|C'D')$ 是一个定值（即与 P 的选取无关）.



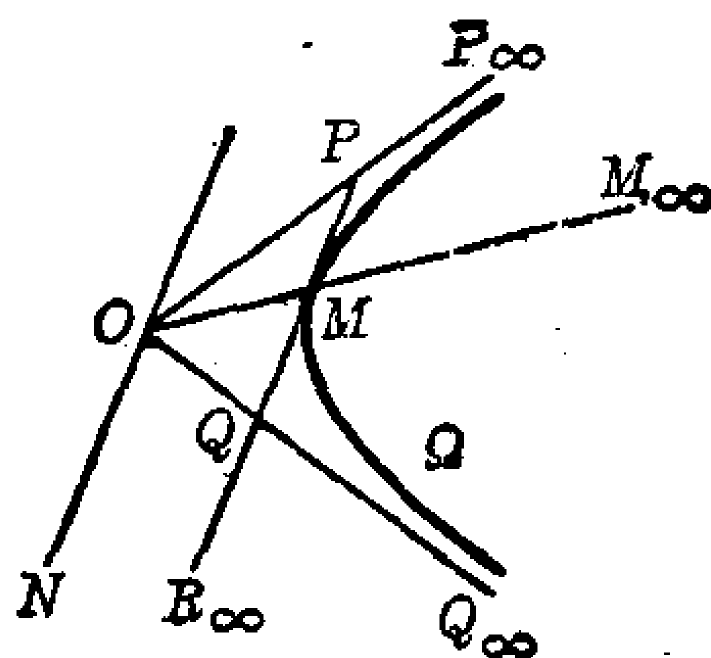
（第 1 题图）

2. 设 Ω 是中心为 O 的椭圆或双曲线，T 是 Ω 外一点. 过 T 作 Ω 的两条切线，其切点为 P 和 Q，PQ 和 OT 交于

V，求证 $PV=VQ$.

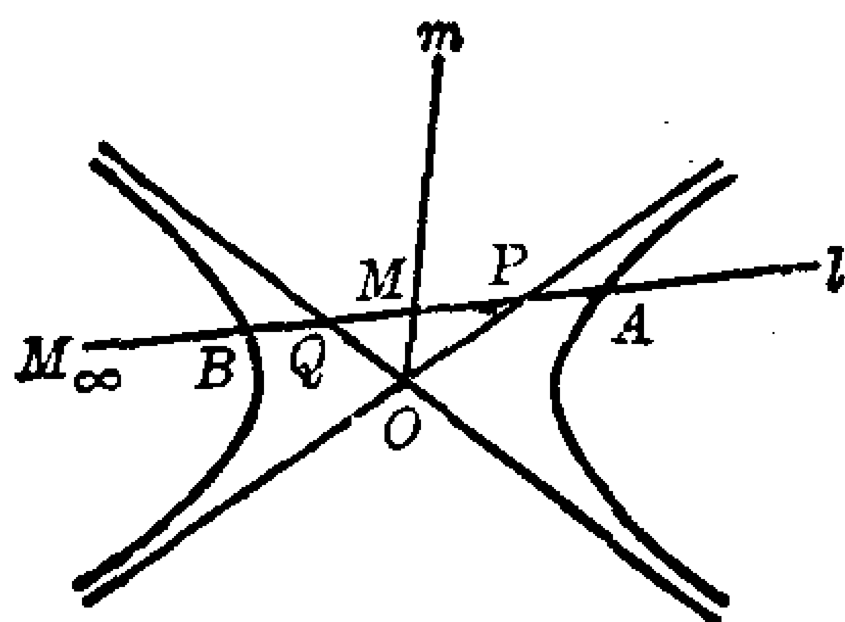


（第2题图）

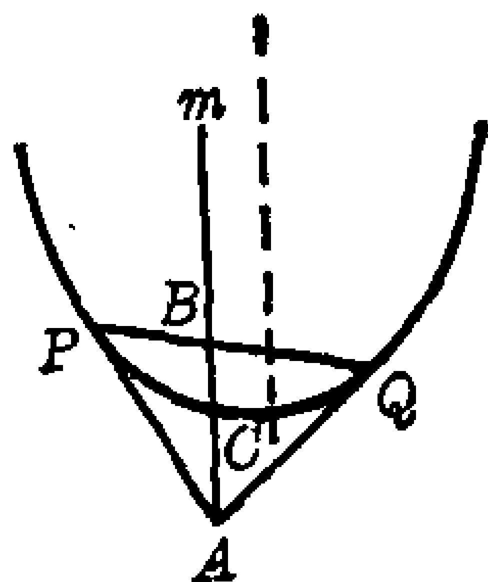


（第3题图）

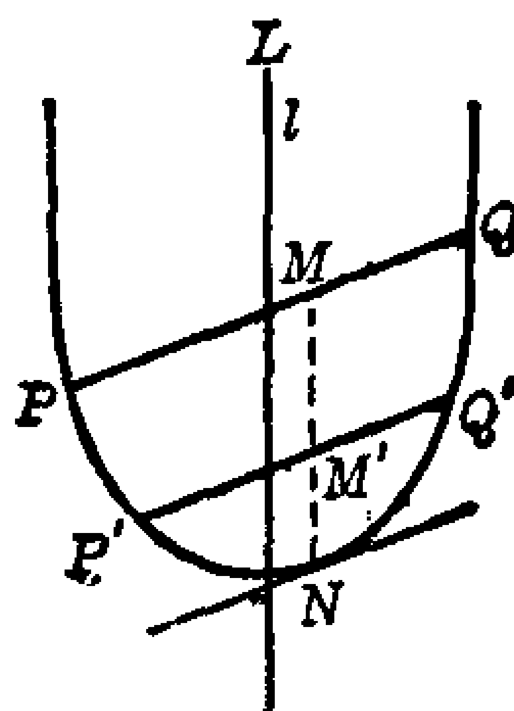
3. 过双曲线 Ω 上一点 M 作 Ω 的切线，此切线与 Ω 的两条渐近线分别交于点 P 和 Q. 过 Ω 的中心 O 作 $ON \parallel PQ$. 求证 $(OP, OQ|OM, ON)=-1$，并且 $PM=MQ$.



（第4题图）



（第5题图）



（第6题图）

4. 设直线 l 与双曲线 Ω 交于两点 B 和 A，与两条渐近线分别交于 Q 和 P，求证 $BQ=PA$.

5. 设 P 和 Q 是抛物线 Ω 上两点. 过 P 和 Q 作 Ω 的两条切线交于点 A. 过 A 作抛物线对称轴的平行线 m，m 与抛物线交于点 C，m 与 PQ 交于点 B. 求证 $AC=CB$.

6. 设 PQ 和 $P'Q'$ 是抛物线的两条平行弦，M 和 M' 分别为此两弦的中点，l 是此抛物线的对称轴，求证 $MM' \parallel l$.

三、什么是几何学？

我们在前两章中，通俗地介绍了平面射影几何. 这一章我们将谈一谈射影几何与其他几何之间的联系. 我们要介绍与射影几何有关联的另一些几何学：仿射几何，欧氏几何以及非欧几何，并从这些几何学的普遍特性中，阐述什么是几何学，什么是几何学的基本问题.

1. 仿 射 几 何

——射影几何的“子几何”

我们说过，平面射影几何是研究射影平面上的几何图形的射影等价分类（即哪些平面几何图形通过射影变换可以将其中一个变成另一个）和几何图形的射影不变性（即几何图形的哪些性质在射影变换下是不变的）. 所以，平面射影几何的研究对象是射影平面上的各种几何图形. 它们通过射影变换相互发生联系. 射影平面上的每个射影变换首先应当是一个变换，即是射影平面上点之间的一一对应. 但

它是一类特殊的变换. 我们一开始是从几何直观入手 将射影变换定义成为有限个中心射影连续作用所得到的变换. 后来,我们给出了射影变换的代数表达方式(本书第77页定理14), 并且给出了射影变换另一种刻划方式(本书第62页定理9): 变换σ是射影变换的充分必要条件是σ把射影直线变成射影直线,并且保持复比.

利用射影变换的后一种刻划方式来判别一个变换是否为射影变换,常常是很方便的. 例如:将射影平面上每个点都保持不动, 显然是点之间的一一对应, 从而是一个变换. 它显然把射影直线变成自身, 并且保持复比. 因此它是射影变换. 这个射影变换叫作是**恒等变换**,表示成I. 又如:设σ是一个射影变换. 由于σ是点之间的一一对应, 所以映射σ有逆映射(如果σ把点A映成B, 则逆映射把B映成A), 并且逆映射也是点之间的一一对应, 即也是一个变换. 我们把σ的逆变换表示成σ^{-1}. 如果σ把射影直线变成射影直线,并且保持复比, σ^{-1}显然也具有这种性质. 所以,若σ是射影变换, 则它的逆σ^{-1}也是射影变换. 最后,若σ和τ都是射影变换, 那末先作用σ然后紧接着再作用τ, 总的结果仍然是射影平面上的一一对应, 我们把这个对应表示成$\tau\cdot\sigma$, 叫作是σ和τ的**乘积**. 如果σ把射影直线l变成射影直线l',而τ又把l'变成射影直线l'', 那末连续作用的结果, $\tau\cdot\sigma$就把射影直线l变成射影直线l''. 如果A、B、C、D是直线l上四点,则σ把它们变成l'上四点A'、B'、C'、D', 而τ又把A'、B'、C'、D'变成l''上四点A''、B''、

C''、D''. 如果 σ 和 τ 都保持复比，则

$$(AB|CD)=(A'B'|C'D')=(A''B''|C''D''),$$

从而 $\tau\cdot\sigma$ 也保持复比. 这就表明：若 σ 和 τ 均是射影变换，则 $\tau\cdot\sigma$ 也是射影变换.

一般地，设 S 是由射影平面上的一些变换所组成的集合，并且下面三个条件成立：

(a) 恒等变换 I 属于 S;

(b) 如果变换 σ 属于 S，则逆变换 σ^{-1} 也属于 S.

(c) 如果变换 σ 和 τ 均属于 S，则它们的乘积 $\tau\cdot\sigma$ 也属于 S.

这时，我们就把 S 叫作是一个**变换群**. 于是，由上所述，我们即知：射影平面上全体射影变换形成的集合是一个变换群，叫作是射影平面上的**射影变换群**.

设 S 是射影平面的任意一个变换群. M、N 是射影平面上的两个几何图形. 如果存在 S 中的一个变换 σ，使得 σ 把 M 变为 N，我们就称 M 等价于 N. 利用 S 是群，易证：

(a) 每个几何图形 M 等价于自身(因为恒等变换 I 属于 S，而 I 把 M 显然变成自身).

(b) 如果 M 等价于 N，N 又等价于 P，则 M 等价于 P(因为由假设条件可知存在 S 中变换 σ 和 τ，使得 σ 把 M 变为 N，τ 把 N 变为 P，于是 $\tau\cdot\sigma$ 把 M 变为 P，并且 $\tau\cdot\sigma$ 仍属于 S).

(c) 如果 M 等价于 N，则 N 等价于 M(因为若 S 中变换 σ 把 M 变成 N，则逆变换 σ^{-1} 也属于 S，并且把 N 变

成 M).

有了以上这三条，我们可以谈两个图形 M 和 N 是彼此等价的，并且可以把各种几何图形分成一些类. 使得同一类中的任意两个图形都是彼此等价的，而不同类中的图形是彼此不等价的. 总之，射影平面上的各种几何图形所以能分成若干等价类，就是因为变换集合 S 是一个变换群.

显然，几何图形的等价分类与所用的变换群是有关系的. 我们在前两章已经研究过对于射影变换群的等价分类(射影等价类). 现在我们来考虑另一种变换群和几何图形在这种新变换群之下的等价分类，从而是与射影几何不同的又一种几何学.

我们知道，每个射影变换 σ 都有如下的代数表达方式：σ 把点 $(x_0:x_1:x_2)$ 变成点 $(y_0:y_1:y_2)$，其中

$$\begin{cases} y_0=a_{00}x_0+a_{01}x_1+a_{02}x_2, \\ y_1=a_{10}x_0+a_{11}x_1+a_{12}x_2, \\ y_2=a_{20}x_0+a_{21}x_1+a_{22}x_2, \end{cases} \tag{1}$$

a_{ij} 均是实数. 让我们看一下，何时 σ 把无穷远直线变成无穷远直线?

如果 σ 把无穷远直线变成无穷远直线，则 σ 把每个无穷远点 $(0:x_1:x_2)$ 均变成无穷远点 $(0:y_1:y_2)$ (注意：我们不需要把每个无穷远点都变成自身，而只要求无穷远直线作为一个整体变成无穷远直线自身). 换句话说，当 $x_0=0$ 时，对于任意的 x_1 和 x_2，由(1)中第一式右边算出的值 y_0 均应是零，即 $0=a_{01}x_1+a_{02}x_2$ 对于任意实数 x_1 和 x_2 均成立，

这只能是 $a_{01}=a_{02}=0$ 的情形. 于是, (1)中第一式变为 $y_0=a_{00}x_0$. 这时, 变换(1)的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} a_{00} & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{00}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

由于 σ 是变换,它的系数行列式不能为零,因此 $a_{00}\neq 0$. 将 $y_0=a_{00}x_0$ 代入(1)中后两个公式,便得到

$$\begin{cases} \dfrac{y_1}{y_0}=\dfrac{a_{10}}{a_{00}}+\dfrac{a_{11}}{a_{00}}\dfrac{x_1}{x_0}+\dfrac{a_{12}}{a_{00}}\dfrac{x_2}{x_0}, \\ \dfrac{y_2}{y_0}=\dfrac{a_{20}}{a_{00}}+\dfrac{a_{21}}{a_{00}}\dfrac{x_1}{x_0}+\dfrac{a_{22}}{a_{00}}\dfrac{x_2}{x_0}. \end{cases} \tag{2}$$

由于 σ 将无穷远直线变成无穷远直线,所以 σ 把射影平面挖去无穷远直线得到的欧氏平面变成欧氏平面, 即可以把 σ 看成是欧氏平面上的变换. 将射影坐标化成欧氏平面上的直角坐标, 即点 $(x_0:x_1:x_2)$ 和 $(y_0:y_1:y_2)$ 分别改成直角坐标 $\left(\dfrac{x_1}{x_0}, \dfrac{x_2}{x_0}\right)$ 和 $\left(\dfrac{y_1}{y_0}, \dfrac{y_2}{y_0}\right)$, 由(2)式可知, 如果把 σ 看成是欧氏平面上的变换,则用直角坐标, 它把点 (x, y) 变成点 (x', y'),其中

$$\begin{cases} x'=c_{11}x+c_{12}y+b_1, \\ y'=c_{21}x+c_{22}y+b_2. \end{cases} \tag{3}$$

利用二元一次方程组解的性质不难看出: (3)式表示的 σ 是欧氏平面上的一个变换,当且仅当系数行列式

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}$$

不等于零(这是因为: 如果 $c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}=0$, 则对于任意点 (x', y'), 直线 $c_{11}x+c_{12}y=x'-b_1$ 和 $c_{21}x+c_{22}y=y'-b_2$ 是两条平行或重合的直线, 它们或者没有解 (x, y), 或者有无穷多组解 (x, y), 从而 σ 不是一一对应. 如果 $c_{11}c_{22}-c_{12}c_{21}\neq 0$, 则对于任意 (x', y'), 上述两方程均是两条相交直线, 从而恰有一组解 (x, y). 于是 σ 为一一对应).

以上我们把射影平面上每个把无穷远直线变成无穷远直线的射影变换归结为形如(3)式的欧氏平面上的变换. 反过来, 欧氏平面上每个形如(3)式的变换(其中 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$)也都可看成是射影平面上把无穷远直线变成无穷远直线的射影变换. 这是因为: 若将直角坐标 (x, y) 和 (x', y') 均换成它们的射影坐标

$$\left(1:\frac{x_1}{x_0}:\frac{x_2}{x_0}\right)=(x_0:x_1:x_2)$$

和
$$\left(1:\frac{y_1}{y_0}:\frac{y_2}{y_0}\right)=(y_0:y_1:y_2),$$

则(3)式变成: (由于 $x_0\neq 0$, $y_0\neq 0$, 并且射影坐标可相差一非零因子, 所以不妨设 $x_0=y_0$).

$$\begin{cases} y_0=x_0, \\ y_1=b_1x_0+a_{11}x_1+a_{12}x_2, \\ y_2=b_2x_0+a_{21}x_1+a_{22}x_2. \end{cases}$$

由于它的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0,$$

从而这是一个射影变换，并且 $x_0=0$ 时 $y_0=0$，即把无穷远直线变成无穷远直线. 于是，我们可以把射影平面上将无穷远直线变成无穷远直线的全体射影变换，等同于欧氏平面上形如(3)式的那些变换. 我们将欧氏平面上形如(3)式的变换，叫作是欧氏平面上的**仿射变换**.

恒等变换显然把无穷远直线变成无穷远直线. 如果射影变换 σ 和 τ 把无穷远直线变成无穷远直线，那末 σ^{-1} 和 $\tau\cdot\sigma$ 也都如此. 因此，把无穷远直线变成无穷远直线的那些射影变换也形成一个变换群(这些射影变换是全体射影变换的一部分，所以这是整个射影变换群的一个"子群"). 因此，欧氏平面上全体仿射变换也形成一个变换群，叫作是欧氏平面的**仿射变换群**. 由于仿射变换全体形成群，所以欧氏平面上的各种图形可以在仿射变换群下进行等价分类. 也就是说，欧氏平面上的两个图形叫作是**仿射等价**的，是指存在仿射变换将其中一个图形变成另一个. 彼此仿射等价的几何图形构成一个**仿射等价类**. 类似地，欧氏平面中几何图形的某个性质(或某个量)叫作是**仿射不变性质**(或仿射不变量)，是指该性质(或量)在仿射变换之下不改变. 研究欧氏平面上几何图形的仿射等价分类和仿射不变性(仿射不变量)的学问就是**平面仿射几何**. 仿射几何与射影几何相比有两点不同：首先，它们的研究对象不同，前者是欧氏平面中的几何图形，而后者是射影平面中的几何图形. 此外，它们的变换群不同，前者是仿射变换群，后者是射影变换群. 当然，我们可以把仿射变换看成是射影平面

上一类特殊的射影变换，这时，仿射变换群可看成是射影变换群的一部分(子群). 在这个意义上，仿射几何可以看成是射影几何的“子几何”.

现在我们谈一下仿射几何. 我们从仿射不变性(量)讲起. 由于射影不变性是在整个射影变换群作用之下不变的性质，当然它在一部分射影变换之下也仍然不变，所以每个射影不变性(量)必然也是仿射不变性(量). 但另一方面，每个仿射不变性(量)是对仿射变换不变的，对于其他射影变换，这性质(或数量)可能会发生变化. 所以可能有某些性质或数量是仿射不变的，但不是射影不变的. 形象地说：变换群愈小，则几何图形的变化和活动的程度就愈小，从而不变性和不变量就愈多.

有哪些新的仿射不变性和不变量呢？首先，仿射变换 σ 看成射影平面上的射影变换的时候，它把无穷远直线变成无穷远直线，从而将非无穷远直线 l 变成非无穷远直线 l'. 由于 l 和 l' 上各有一个无穷远点，而 σ 必然把 l 的无穷远点变成 l' 的无穷远点. 于是，将 l 和 l' 都去掉各自的无穷远点之后，作为欧氏平面上的变换，则每个仿射变换都把欧氏平面中的直线变成直线. 进而，若仿射变换 σ 把直线 l_1 和 l_2 分别变成 l'_1 和 l'_2，则 l_1 和 l_2 的交点必然变成 l'_1 和 l'_2 的交点. 若 σ 把点 A 和 B 变成点 A' 和 B'，则 σ 必把直线 AB 变成直线 $A'B'$. 同样地，仿射变换把共线的三点变成共线的三点，把共点的三条直线变成共点的三条直线. 这些性质和射影几何中是一样的，但现在的点和直线都是欧氏平

面中的几何图形. 另一方面，“两直线平行”不是射影不变性. 可是：

定理 1 直线的平行性是仿射不变性. 换句话说，仿射变换把欧氏平面上两条平行直线变成两条平行直线.

证明 设 l_1 和 l_2 是欧氏平面上两条平行直线，则在射影平面中它们交于无穷远点 A. 仿射变换 σ 把 l_1 和 l_2 变成直线 l_1' 和 l_2'，把无穷远点 A 变成无穷远点 A'. 但是，无穷远点 A' 是 l_1' 和 l_2' 的交点，从而 l_1' 和 l_2' 平行. 证毕.

其次，我们知道一直线上四个点的复比是射影不变量，而一直线上三个点的简单比 $(ABC)=\dfrac{AC}{BC}$ 不是射影不变量. 但是：

定理 2 欧氏平面中直线上三点的简单比是仿射不变量.

证明 设 A、B、C 是直线 l 上三个点，仿射变换 σ 把直线 l 变成直线 l'，于是把 l 上的无穷远点 P 变成 l' 上的无穷远点 P'，而把 A、B、C 变成 l' 上三点 A'、B'、C'. 作为射影变换的 σ 是保持复比的，从而

$$(AB|CP)=(A'B'|C'P').$$

但是 $$(AB|CP)=(ABC)/(ABP)=(ABC)$$

(因为 P 是无穷远点，$(ABP)=1$)；同样地，$(A'B'|C'P')=(A'B'C')$. 所以 $(ABC)=(A'B'C')$. 证毕.

由于一直线上三点 A、B、C 的简单比 (ABC) 是这三点组成的两个有向线段 AC 和 BC 的长度的比值，所以，由此

可以证明

定理3 同一直线上任意两个有向线段的长度的比值是仿射不变量.

证明 设 A、B、C、D 是直线上任意四点，仿射变换 σ 把它们分别变成另一直线上的四点 A'、B'、C'、D'，则由于简单比是仿射不变量，可知

$$\frac{AB}{CD}=\frac{AB}{BC}\cdot\left(-\frac{BC}{DC}\right)=\frac{A'B'}{B'C'}\cdot\left(-\frac{B'C'}{D'C'}\right)$$

$$=\frac{A'B'}{C'D'}.$$

证毕.

特别地，"线段的中点"是仿射不变量，即若仿射变换 σ 把 A、B 分别变成 A'、B'，则 σ 必把线段 AB 的中点变成 $A'B'$ 的中点. 这是因为：C 为线段 AB 的中点相当于 $(ABC)=-1$. 类似地，现在我们来证明：欧氏平面上两个几何图形的面积比也是仿射不变量. 由于几何图形可看成是由许多(可能无穷多个)三角形拼成的，为简单起见，我们只设这两个几何图形是三角形，即我们要证明

定理4 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 是平面上两个三角形. 仿射变换 σ 把这两个三角形分别变成 $\triangle A'B'C'$ 和 $\triangle D'E'F'$，则

$$\frac{\triangle ABC\text{的面积}}{\triangle DEF\text{的面积}}=\frac{\triangle A'B'C'\text{的面积}}{\triangle D'E'F'\text{的面积}}.$$

证明 设点的直角坐标为 $A=(x_1, y_1)$、$B=(x_2, y_2)$、$C=(x_3, y_3)$、$A'=(x_1', y_1')$、$B'=(x_2', y_2')$、$C'=(x_3', y_3')$，又

设仿射变换 σ 由公式(3)所定义，则

$$\begin{cases} x_i'=a_{11}x_i+a_{12}y_i+b_1, \\ y_i'=a_{21}x_i+a_{22}y_i+b_2. \end{cases} \quad (\text{其中 } i=1,\ 2,\ 3) \qquad (4)$$

由解析几何知道，$\triangle ABC$ 的面积和 $\triangle A'B'C'$ 的面积分别是

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3-x_2 & y_3-y_2 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} \text{ 和 } \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3'-x_2' & y_3'-y_2' \\ x_3'-x_1' & y_3'-y_1' \end{vmatrix}$$

的绝对值. 但是，由(4)式知

$$\begin{vmatrix} x_3'-x_2' & y_3'-y_2' \\ x_3'-x_1' & y_3'-y_1' \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11}(x_3-x_2)+a_{12}(y_3-y_2) & a_{21}(x_3-x_2)+a_{22}(y_3-y_2) \\ a_{11}(x_3-x_1)+a_{12}(y_3-y_1) & a_{21}(x_3-x_1)+a_{22}(y_3-y_1) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_3-x_2 & y_3-y_2 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}.$$

(对于不熟悉行列式运算技巧的读者，最后一个等式可以通过直接计算来验证.)于是

$\triangle A'B'C'$ 的面积 $=\triangle ABC$ 的面积乘以 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的绝对值

$\left(\text{特别取} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq \pm 1\right.$，即知三角形面积不是仿射不变量$\Big)$. 同样地，$\triangle D'E'F'$ 的面积等于 $\triangle DEF$ 的面积乘以

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的绝对值. 于是即得定理.

现在我们给出欧氏平面上仿射变换的一些具体例子.

〔例 1〕 平面的平移变换可表示成 $x'=x+b_1$, $y'=y+b_2$. 由于行列式为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq0$, 从而为仿射变换. 绕原点旋转 θ 角的变换可以表示成 $x'=x\cos\theta-y\sin\theta$, $y'=x\sin\theta+y\cos\theta$. 由于行列式 $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}=1\neq0$, 从而它们也是仿射变换. 平面以 OX 轴为对称轴的反射变换可以表示成 $x'=x$、$y'=-y$. 由于 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq0$, 从而它也是仿射变换.

〔例 2〕 设 $x'=ax$、$y'=by$. 当 $a\neq0$、$b\neq0$ 时, 这是仿射变换.

可以证明, 每个仿射变换都是有限个上述各种类型仿射变换的乘积. 考查例 2 中的仿射变换, 可知线段长度, 两点距离, 直线的夹角, 直线垂直性等, 均不是仿射不变性或仿射不变量.

现在我们来谈仿射等价分类. 两个几何图形如果对某个变换群 S 是等价的, 那末根据定义便知对于比 S 更大的群更是等价的. 因此, 若两个几何图形仿射等价, 那末它必然射影等价. 反之, 射影等价的几何图形不一定仿射等价. 所以, 一个射影等价类可能分解成一些仿射等价类, 也就是

说，群愈小，等价类就愈多，或者说等价分类愈细．例如：所有的四边形都射影等价．但是平行四边形和非平行四边形不是仿射等价的，因为平行性是仿射不变性．可是对于三角形则有如下结果：

定理5 设$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$是欧氏平面上两个三角形，则存在唯一的仿射变换，将A、B、C分别变成A'、B'、C'．（特别地，所有三角形均仿射等价．）

证明 设直线AC、$A'C'$、AB、$A'B'$上的无穷远点分别是P、P'、Q、Q'．不难验证：B、C、P、Q中，任意三点均不共线；B'、C'、P'、Q'也是如此．于是存在射影变换σ，把B、C、P、Q分别变为B'、C'、P'、Q'．于是σ把无穷远直线PQ变成无穷远直线$P'Q'$，即σ是仿射变换．σ把B、C分别变为B'、C'．我们只需再证σ把A变成A'．这只要注意：σ把射影直线CP变为$C'P'$．可是CP即是AC，$C'P'$即是$A'C'$，因此σ把直线AC变成$A'C'$．同样地，σ把AB变为$A'B'$．于是，σ把AC和AB的交点A变为$A'C'$和$A'B'$的交点A'．以上证明了存在仿射变换σ，把A、B、C分别变成A'、B'、C'．

现在来证明这种仿射变换σ的唯一性．这只需证明：对于欧氏平面上每个点D，σ都把D变成唯一确定的点．过D作平行于AB和AC的直线，它们与BC分别交于E、F，当D给定之后，E和F两

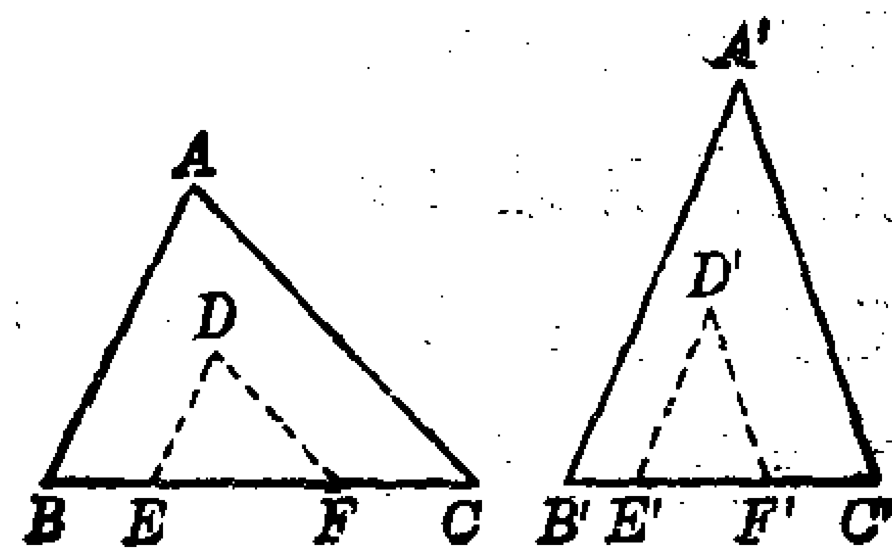


图 3-1

点也唯一确定，从而(BCE)和(BCF)也唯一确定．设σ把E、F分别变为E'、F'，则E'、F'在$B'C'$上．由于仿射变换保持简单比，从而$(B'C'E')=(BCE)$．由于(BCE)值唯一确定，而B'、C'也是给定点，于是点E'也唯一确定．类似地，点F'也由$(B'C'F')=(BCF)$所唯一确定．过E'和F'分别作直线平行于$B'A'$和$C'A'$，并且它们交于D'．由于$AB /\!/ ED$，而σ保持直线平行性，可知σ把直线ED变为$E'D'$．同样地，σ把FD变为$F'D'$．从而σ把D变为$E'D'$和$F'D'$的交点D'，而D'是唯一确定的，这就证明了仿射变换σ的唯一性．证毕．

最后我们谈谈圆锥曲线的仿射等价分类．每个椭圆可写成

$$a^2x^2+b^2y^2=1.$$

其中$a\neq 0$、$b\neq 0$．例2中，仿射变换$x'=ax$、$y'=by$把它变成半径为1的圆

$$x'^2+y'^2=1.$$

因此，所有的椭圆均仿射等价．但是椭圆不可能与抛物线或双曲线仿射等价，因为椭圆与无穷远直线不相交，而仿射变换把无穷远直线仍变成无穷远直线，所以仿射变换把椭圆变成的曲线C仍旧与无穷远直线不相交，从而曲线C不能是与无穷远直线交于两点的双曲线或交于一点的抛物线．于是，仿射变换只能把椭圆变成椭圆．换句话说，所有的椭圆形成一个仿射等价类．类似地，所有的双曲线形成一个仿射等价类．所有的抛物线也形成一个仿射等价类．于是，属

于一个射影等价类的圆锥曲线被细分成三个仿射等价类.

练习题(十)

1. 欧氏平面上的变换σ若把直线变成直线,并且保持简单比不变,则σ一定是仿射变换.

2. (a) 求证:存在仿射变换,把欧氏平面中任意三条不同的共点直线,变成任意三条不同的共点直线.

(b) 求证:存在仿射变换,把欧氏平面任意两条平行线,变成任意两条平行线.

3. 试将欧氏平面中具有下列性质的几何图形作仿射等价分类:

(a) 两条相交直线.

(b) 三条彼此平行的直线.

(c) 平行四边形.

(d) 等腰梯形.

4. 写出将点(0, 0), (1, 0), (0, 1)分别变成点(2, 0), (0, 2), (3, 1)的仿射变换的解析表达式.

5. 下列性质是否为仿射不变性质?

(a) 某点在某三角形的内部.

(b) 某两点在某直线的两侧.

(c) 一条线段比另一条线段短.

(d) 某直线与某曲线相切.

(e) 某图形是菱形.

(f) 某点是三角形的重心.

(g) 某点是三角形的垂心.

6. 利用仿射变换，计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（这里 $a>0$, $b>0$）的面积.

7. 求仿射变换，把(1, −1)变成(−1, 2)，并且将直线 $x+2y-1=0$ 上所有点均保持不变.

2. 用仿射几何解题

现在我们举例说明如何利用仿射几何解题. 其思考方法和利用射影几何解题的情形是相同的：如果问题只涉及几何图形的仿射不变性质，我们可以利用仿射变换.

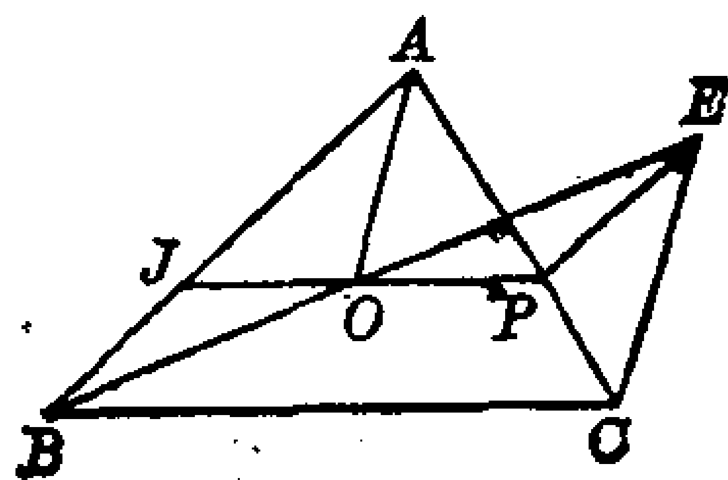


图 3-2

〔例 1〕 设 O 是 $\triangle ABC$ 内一点. 过 O 作平行于 BC 的直线，与 AB 和 AC 分别交于 J 和 P. 过 P 作直线 PE 平行于 AB，与 BO 的延长线交于 E. 求证：$CE \parallel AO$. (图 3-2)

证明 设 AO 延长线与 BC 交于 D. 由于题中只涉及仿射不变性质，我们不妨设 $\triangle ADC$ 是等腰直角三角形，即 $AD=DC$、$AD\perp DC$（图 3-3）. 过 P 作平行于 AD 的直线，与 BC 交于点 G. 再设 EP 与 BC 交于 F. 为证 $CE \parallel AO$，只需证明 $CE \parallel PG$，从而只需证明 $\frac{FP}{EP}=\frac{FG}{CG}$. 而这是容易的，因为

$$\frac{FP}{EP}=\frac{BJ}{EP}=\frac{OJ}{OP}=\frac{OJ}{OA}=\frac{FG}{GP}=\frac{FG}{CG}.$$

证毕。

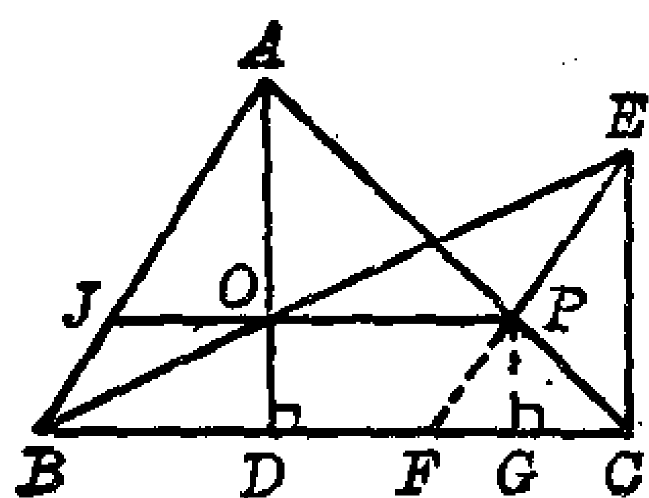


图 3-3

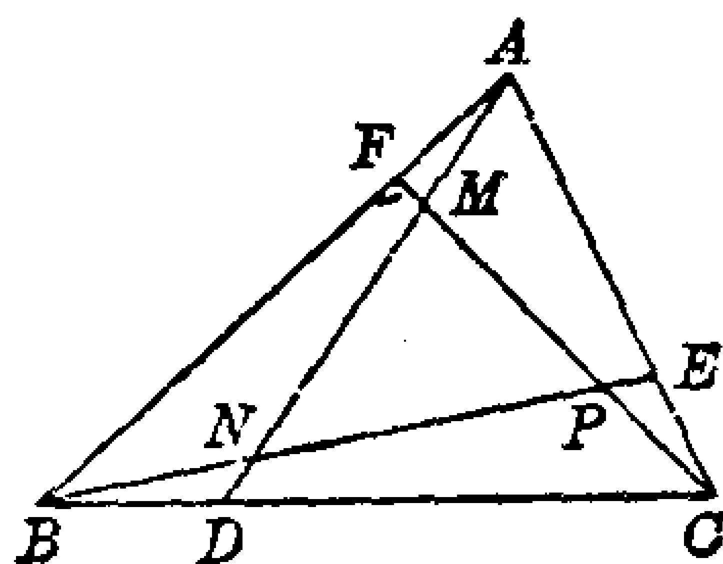


图 3-4

〔例 2〕 设 D、E、F 分别在 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上，并且

$$\frac{AF}{FB}=\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{1}{m}$$

(图 3-4)；设 AD 和 BE 交于 N，BE 和 CF 交于 M，CF 和 AD 交于 P，求 $\triangle MNP$ 的面积与 $\triangle ABC$ 面积之比。

解 由于面积比是仿射不变性，我们不妨设 $\triangle ABC$ 是正三角形(图 3-5)。以正三角形 ACB 的重心为中心旋转 $120°$，则 A、B、C 分别变到 B、C、A，而 D、E、F 分别变到 E、F、D。于是直线交点 M、N、P 分别变到 N、P、M，从而 $\triangle MNP$ 也是正三角形。为了求 $\triangle MNP$ 的面积与 $\triangle ABC$ 面积之比，我们只需求出这两个正三角形边长之比即可。令 $BC=1+m$，则

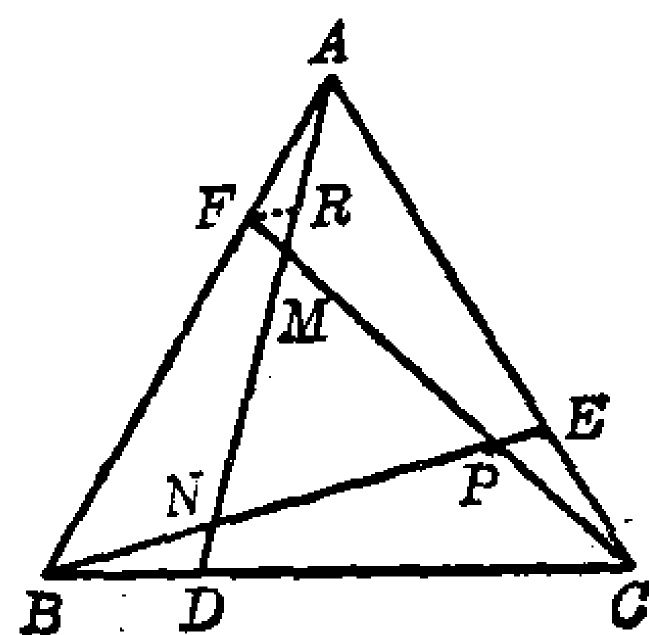


图 3-5

$$AF=BD=CE=1,$$
$$FB=DC=EA=m.$$

过F作$FR\parallel BC$，且FR与AD交于R. 则

$$\frac{FR}{BD}=\frac{AF}{AB},$$

即$\frac{FR}{1}=\frac{1}{m+1}$，从而

$$FR=\frac{1}{m+1}.$$

又$\frac{FM}{MC}=\frac{FR}{DC}=\frac{1}{m(m+1)}$，于是

$$FM=\frac{FC}{m^2+m+1}.$$

而
$$CP=(m+1)EP=(m+1)FM$$
$$=\frac{m+1}{m^2+m+1}FC.$$

由$\frac{AF}{CF}=\frac{AM}{AC}$可知

$$\frac{1}{CF}=\frac{\frac{m+1}{m^2+m+1}\cdot CF}{m+1}=\frac{CF}{m^2+m+1},$$

于是
$$CF=\sqrt{m^2+m+1}.$$

而 $MP=CF-FM-CP$

$$=\sqrt{m^2+m+1}\left(1-\frac{1}{m^2+m+1}-\frac{m+1}{m^2+m+1}\right)$$
$$=\frac{m^2-1}{\sqrt{m^2+m+1}}.$$

于是

$$\frac{\triangle MNP\text{面积}}{\triangle ABC\text{面积}}=\left(\frac{MP}{BC}\right)^2$$

$$=\frac{(m^2-1)^2}{(m^2+m+1)(m+1)^2}$$

$$=\frac{(m-1)^2}{m^2+m+1}.$$

〔例 3〕（椭圆的仿射性质）由于每个椭圆都与圆仿射等价，我们在平面几何中学过圆的许多性质，如果圆的某个性质是仿射不变的，那末每个椭圆也都具有这个性质.

比如说，我们可以把圆心说成是"与圆周上各点距离相等的点". 但是距离并不是仿射不变量，所以我们不能期望每个椭圆内有这样的点. 但是若将圆心 O 刻划为："任意过 O 的直线与圆周所截线段均被点 O 所平分"，这是仿射不变性质. 所以每个椭圆内均存在唯一的点 O'，使得过 O' 的每条直线与此椭圆所截线段均被点 O' 所平分. 点 O' 叫作椭圆的**中心**. 与圆的情形一样，过中心 O' 的每条直线与此椭圆所截线段叫作该椭圆的**直径**.

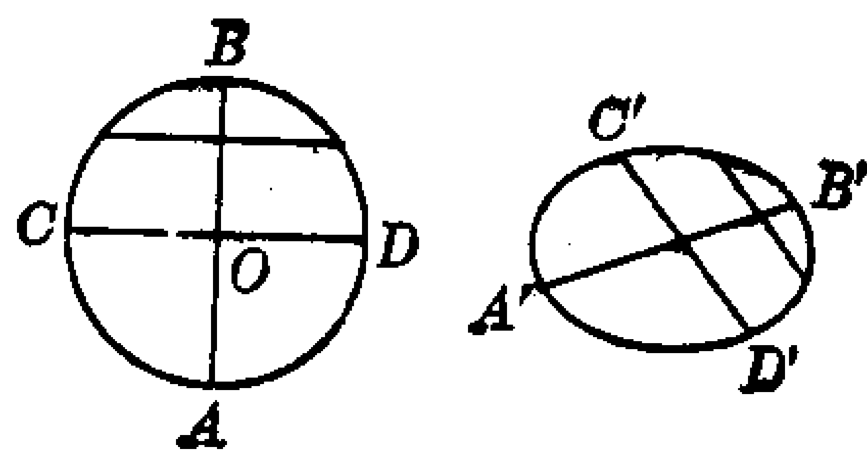


图 3-6

设仿射变换 σ 把圆 O 变成中心为 O' 的椭圆. 于是，σ 把圆心 O 变成 O'. 设 AB 和 CD 是圆 O 的两条相互垂直的直径. 则 σ 把它们变成椭圆的两条直径 $A'B'$ 和 $C'D'$，但是它们并不一定垂直. 我们把由圆内相互垂直的两条直径变成的椭圆内的两条直径叫作是

相互共轭的直径，或者将其中一条叫作是另一条的共轭直径．如何不借助于仿射变换，通过椭圆自身来判别何时两条直径彼此共轭？这就需要用仿射不变性来刻划圆内彼此垂直的两条直径．不难证明，圆内两条直径彼此垂直的充分必要条件是：与一条直径平行的弦均被另一条直径所平分．而后者是仿射不变性．从而我们得到：

椭圆内两条直径彼此共轭的充分必要条件是：该椭圆内所有与一条直径平行的弦均被另一条直径所平分．

由此可知，任给椭圆一条直径，则平行于此直径的弦的中心的轨迹是此直径的共轭直径．利用这条轨迹性质，我们可以作椭圆内任意一条直径的共轭直径．

我们再看圆的另一个仿射不变性质．设 AB 和 CD 是圆心为 O 的圆中相互垂直的两条直径．$CF /\!/ AB$，$BF /\!/ CD$．过 A 作直线，与 CO 交于 K，与圆周交于 M．延长 BM，与 CF 交于 L(图 3-7)．考虑两个相似的直角三角形 AOK 和 BFL，即知 $\frac{AO}{KO}=\frac{BF}{LF}$．但是 $AO=CO$、$BF=CF$，从而 $(CKO)=(CLF)$．由于简单比是仿射不变量，从而这个简单比等式对任意的椭圆也成立(但需要把相互

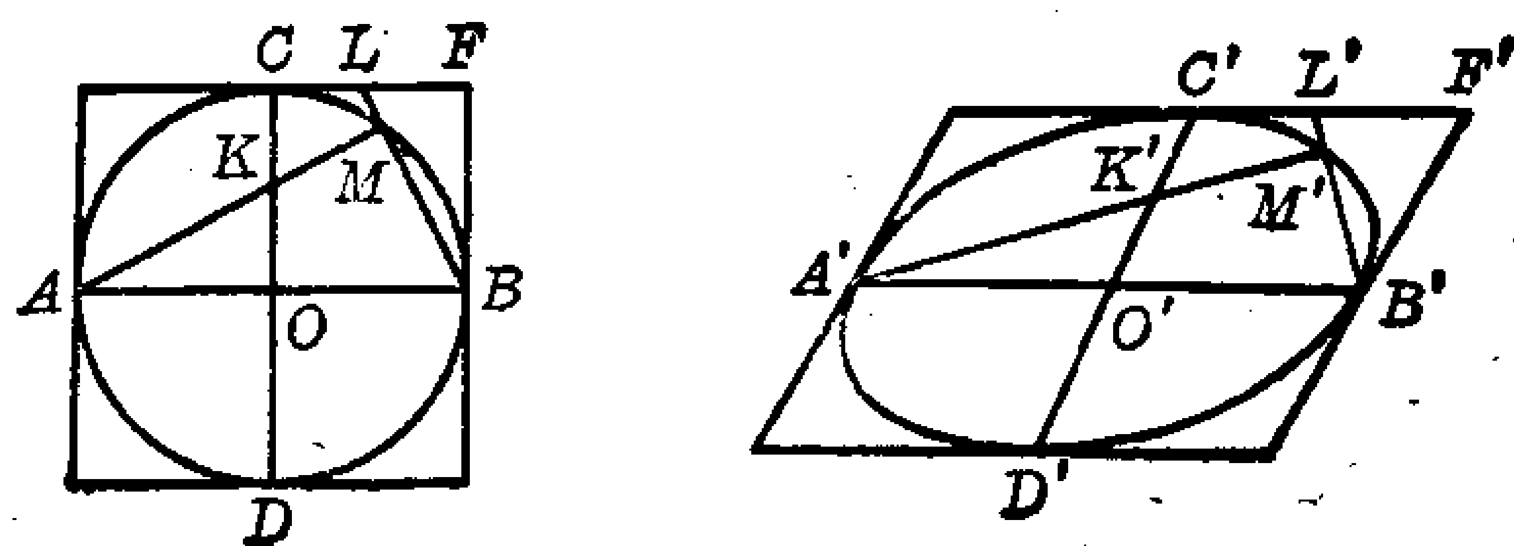


图 3-7

垂直的直径说成是相互共轭的直径)。

椭圆的这个仿射性质使我们可以由椭圆的一对共轭直径画出整个椭圆(见图3-7)：设 $A'B'$ 和 $C'D'$ 是某椭圆的一对共轭直径. 作 $B'F' \parallel C'D'$, $C'F' \parallel A'B'$, 并且 $B'F'$ 和 $C'F'$ 交于 F'. 在 $C'O'$ 上任取一点 K', 然后在 $C'F'$ 上取点 L', 使 $(C'L'F')=(C'K'O')$, 则 $A'K'$ 的延长线与 $B'L'$ 的交点 M' 就是该椭圆上的点. 当 K' 在 $C'O'$ 上移动时, 点 M' 画出该椭圆的四分之一部分；类似地, 可画出其他部分. 这也表明：椭圆由它一对共轭直径所完全决定.

上面(以及练习题中)所述的关于椭圆的各种仿射性质, 用平面几何或解析几何证明都不十分容易, 但是利用仿射几何, 它们都是圆的相应性质的直接推论.

〔例4〕 设 A、B、C、D 是任意三角形三边上的四个点, 求证 A、B、C、D 当中必定有三个点围成的三角形面积不超过原三角形面积的 1/4.

证明 设原三角形是 $\triangle PQR$, A、B、C、D 四点中必然有两个点在同一边上. 不妨设点 A 和 B 在 PQ 边上, C 和 D 分别在 PR 和 QR 边上. 由于题中面积比是仿射不变性, 从而我们不妨设 $P=(0,1)$, $R=(0,0)$, $Q=(1,0)$, 于是 $\triangle PQR$ 为直角边长为 1 的等腰直角三角形. PQ 边

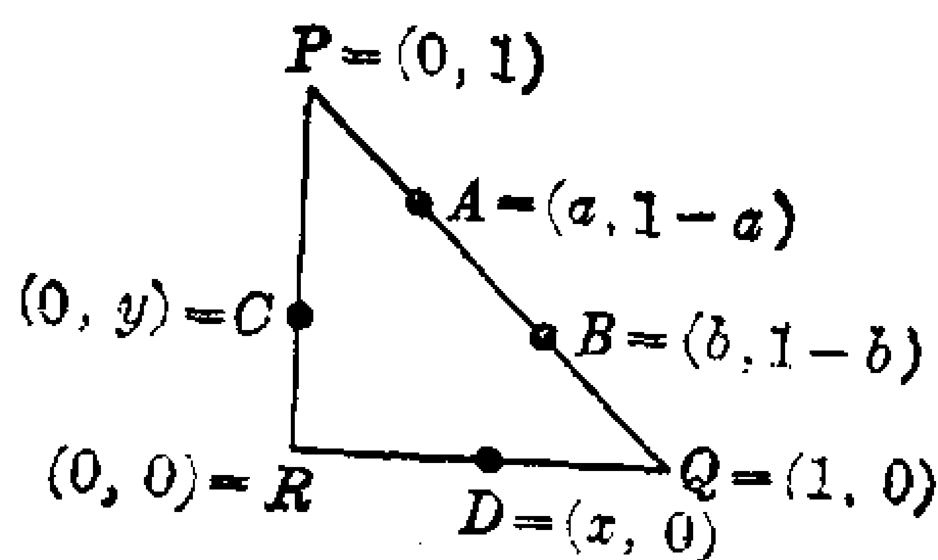


图 3-8

上的点有形式 $A=(a,1-a)$, $B=(b,1-b)$, 而 $C=(0,y)$,

$D=(x, 0)$. 不妨设 $b\geqslant a$, $y\geqslant x$, 于是: $0\leqslant a\leqslant b\leqslant 1$, $0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1$. 由于

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle PQR}=\frac{\sqrt{2}(b-a)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1-y)}{1}$$

$$=(1-y)(b-a).$$

从而当 $1-y\leqslant\frac{1}{4(b-a)}$ 时, $\triangle ABC$ 即为所求. 因此, 以下设 $1-y>\frac{1}{4(b-a)}$, 于是

$$0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1-\frac{1}{4(b-a)}\leqslant 1-\frac{1}{4(1-a)}.$$

这时, $\triangle ACD$ 的面积是 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & 1-a-y \\ a-x & 1-a \end{vmatrix}$ 的绝对值, 即

$$\triangle ACD=\frac{1}{2}|a(1-a)+(x-a)(1-a-y)|$$

$$=\frac{1}{2}|x(1-y)+a(y-x)|$$

$$=\frac{1}{2}[x(1-y)+a(y-x)].$$

(由于 x, $(1-y)$, a, $y-x$ 均大于等于 0)

令 $x'=1-x$、$y'=1-y$, 则

$$\frac{1}{4(1-a)}\leqslant y'\leqslant x'\leqslant 1.$$

而
$$\triangle ACD=\frac{1}{2}[y'(1-x')+a(x'-y')]$$

$$=\frac{1}{2}[y'(1-a)-x'(y'-a)]$$

$$\leqslant\frac{1}{2}[y'(1-a)-y'(y'-a)]$$

$$\left(\text{因为 } y'-a\geqslant\frac{1}{4(1-a)}-a\geqslant 0\right)$$

$$=\frac{1}{2}y'(1-y')\leqslant\frac{1}{8}$$

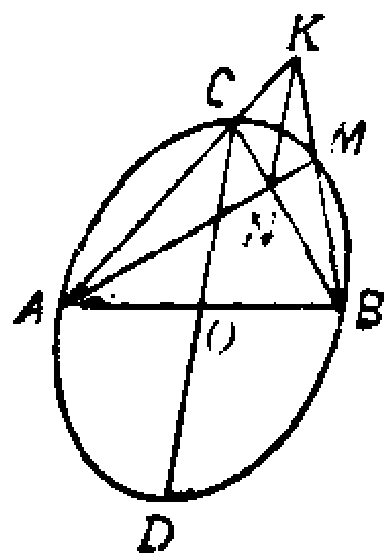
$$=\frac{1}{4}\cdot\triangle PQR.$$

从而 $\triangle ACD$ 即为所求. 证毕.

练 习 题（十一）

1. 设 AB 是某椭圆的直径. 平行于 AB 的两条直线与此椭圆相切，设切点分别为 C 和 D. 求证 CD 是与 AB 共轭的直径.

2. 设 AB 和 CD 是椭圆一对共轭直径. 在 BC 弧上任取一点 M, BM 和 AC 的延长线交于 K, AM 和 BC 交于 N(如图), 求证 $KN\parallel CD$.



（第 2 题图）

3. 基于上题, 给出由一对共轭直径画椭圆的方法.

4. 椭圆外切四边形两条对角线中点和该椭圆中心这三点共线.

5. 设 Ω 是一给定的椭圆, 求

(a) Ω 的内接三角形面积的最大值.

(b) Ω 的外切三角形面积的最小值.

6. 用仿射几何证明本书第 99 页练习题第 2 题.

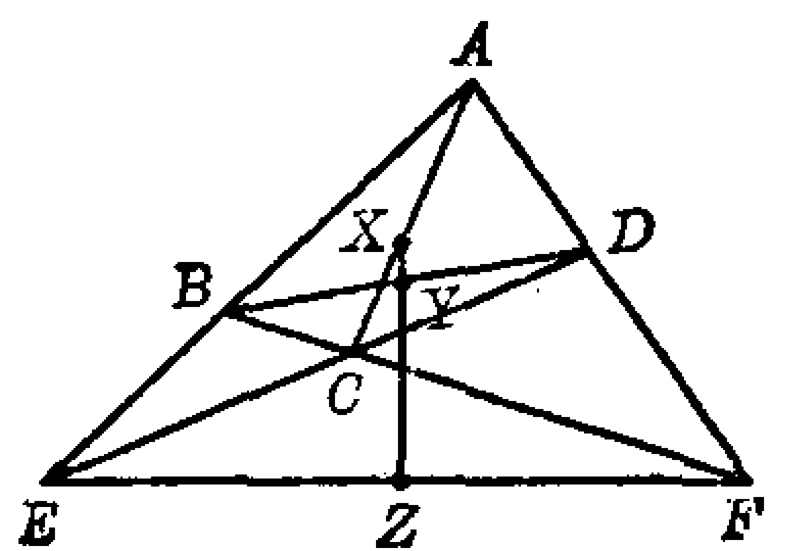
7. 用仿射几何证明本书第 100 页练习题第 3 题.

8. 用仿射几何证明本书第 100 页练习题第 4 题.

9. 用仿射几何证明本书第 100 页练习题第 5 题.

10. 用仿射几何证明本书第 100 页练习题第 6 题.

11. 用仿射几何证明本书第 98 页定理 26.



(第 12 题图)

12. 证明：完全四边形 $ABCDEF$ 的三条对角线的中点 X、Y、Z 在一条直线上.

3. 什么是几何学?

前两节我们介绍了欧氏平面上的仿射几何. 现在我们介绍仿射几何的"子几何"，即大家所熟悉的欧氏几何. 这种几何的研究对象和仿射几何一样，仍是欧氏平面中的各种几何图形，但是变换群不同. 欧氏几何中所采用的变换是保距变换，或叫欧氏变换. 欧氏平面上的变换 σ 叫作是**保距变换**，是指当 σ 把平面上任意两点 A 和 B 分别变成 A' 和 B' 时，均有 $|AB|=|A'B'|$. 这里 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度. 不难看出：(1) 恒等变换是保距变换；(2) 若 σ 是保距变换，则它的逆变换 σ^{-1} 也是保距变换；(3) 若 σ 和 τ 均是保距变换，则它们的乘积 $\tau\cdot\sigma$ 仍是保距变换. 于是，全体保距变换形成一个群，叫作**保距变换群**(或**欧氏变换群**).

平面欧氏几何就是研究欧氏平面上几何图形在保距变换群作用下的不变性和分类的一门学科. 两个几何图形在保距变换下等价，就是我们通常所说的这两个几何图形"全等".

为了看出欧氏几何与仿射几何的联系，我们要证明：每个保距变换都是仿射变换. 也就是说，保距变换群是仿射变换群的一部分(即前者是后者的"子群"). 再由于两者几何的对象都是欧氏平面上的几何图形，从而我们说：欧氏几何是仿射几何的"子几何".

为了证明保距变换是仿射变换，我们先要研究欧氏几何有哪些不变性质和不变量.

定理6 (1) 保距变换把欧氏平面上的直线变成直线；

(2) 保距变换保持两直线的夹角；

(3) 保距变换将平行直线变成平行直线，将两条垂直的直线变成两条垂直的直线.

证明 (1) 设 A、B、C 是共线的三点. 不妨设 B 在线段 AC 的中间，则 $|AB|+|BC|=|AC|$. 如果保距变换 σ 把 A、B、C 分别变成 A'、B'、C' 三点，由于 σ 是保持距离的，因此 $|A'B'|+|B'C'|=|A'C'|$. 由此式即知 A'、B'、C' 必然在一条直线上(因为若 A'、B'、C' 形成三角形的三顶点，则两边之和大于第三边，即应当

$$|A'B'|+|B'C'|>|A'C'|,$$

而这与前式矛盾)，并且一定是 B' 在线段 $A'C'$ 的中间. 于是，σ 把直线变成直线.

(2) 设直线 AB 和 AC 交于 A. 保距变换 σ 把 A、B、C 三点分别变成 A'、B'、C'，则 σ 把直线 AB 和 AC 分别变成直线 $A'B'$ 和 $A'C'$. 由于 σ 保持距离，于是

$$|AB|=|A'B'|,\quad |AC|=|A'C'|,$$
$$|BC|=|B'C'|.$$

从而 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 三组对应边相等. 于是，这两个三角形全等. 从而 $\angle BAC=\angle B'A'C'$. 即 σ 保持直线的夹角.

由(2)可直接推出(3)，因为平行直线的夹角为0°，垂直直线的夹角为90°，它们在保距变换之下是不变的. 证毕.

现在我们可以证明：

定理 7 保距变换一定是仿射变换.

证明 设保距变换 σ 把点 $(0, 0)$，$(1, 0)$，$(0, 1)$ 分别变成点 (a_0, b_0)，(a_1, b_1)，(a_2, b_2). 设 σ 把 $(0, y)$ 变成点 (X, Y). 由于 $(0, 0)$、$(0, 1)$ 和 $(0, y)$ 共线，从而 (a_0, b_0)、(a_2, b_2) 和 (X, Y) 也共线，而且由定理 6 证明(1)的过程中知道变换 σ 保持点的排列次序(即若 B 在线段 AC 之间，则 B' 也在线段 $A'C'$ 之间). 由于点 (a_0, b_0) 到点 (a_1, b_1) 和 (X, Y) 的距离分别是 1 和 y，从解析几何即知

$$\frac{X-a_0}{a_2-a_0}=\frac{Y-b_0}{b_2-b_0}=y,$$

于是 σ 把点 $(0, y)$ 变成点

$$P=((a_2-a_0)y+a_0,\ (b_2-b_0)y+b_0).$$

类似地，σ 把点 $(x, 0)$ 变成点

$$Q=((a_1-a_0)x+a_0,\ (b_1-b_0)x+b_0).$$

由于$(0, 0)$、$(0, y)$、$(x, 0)$、(x, y)是矩形的四个顶点，而σ保持直线的垂直性，从而若σ把点(x, y)变成点R，则(a_0, b_0)、P、R、Q是矩形的四个顶点(图 3-9)．于是

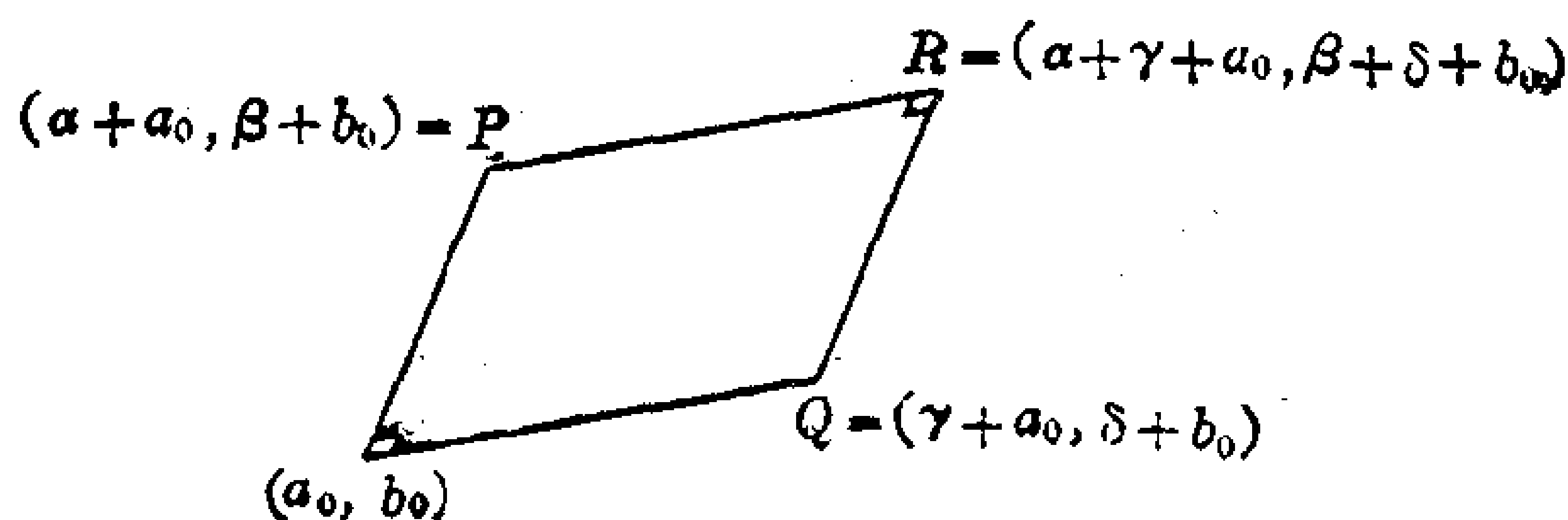


图 3-9

$$R=((a_1-a_0)x+(a_2-a_0)y+a_0,$$
$$(b_1-b_0)x+(b_2-b_0)y+b_0).$$

所以，若σ把点(x, y)变为点(x', y')，则

$$\begin{cases} x'=(a_1-a_0)x+(a_2-a_0)y+a_0, \\ y'=(b_1-b_0)x+(b_2-b_0)y+b_0. \end{cases}$$

这正是仿射变换的解析表达式．这就证明了每个保距变换都是仿射变换．证毕．

在前一节中，我们给出仿射变换的两个例子．大家知道，例 1 中的仿射变换(即平移，旋转和反射)都是保持距离的，即都是保距变换；而例 2 中的仿射变换$x'=ax$, $y'=by$只有当$a=\pm1$、$b=\pm1$时才是保距变换．可以证明：每个保距变换都可表成有限个例 1 中所列的保距变换的乘积，这些我们都不想多谈了，因为我们不打算过多叙述大家已经熟悉的欧氏几何．

我们在欧氏几何中所研究的几何图形性质，都是保距变换下的不变性质。由于保距变换群比仿射变换群小，所以欧氏几何中的不变性质和不变量(如线段长度，直线夹角，平行，垂直，图形面积，正多边形，圆，平行四边形，梯形等等)也比仿射几何中要多。另一方面，欧氏几何中几何图形的分类(即按“全等”分类)比仿射等价分类也要细。例如圆在欧氏几何中分成无穷多类，只有半径相等的圆才能全等。三角形也是如此。而在仿射几何中，所有的圆连同所有的椭圆形成一个等价类，而所有的三角形构成一个等价类。

至此，我们已向大家介绍了三种几何：射影几何，仿射几何和欧氏几何。它们或者研究对象不同(如射影几何的研究对象是射影平面中的几何图形，仿射几何和欧氏几何则是研究欧氏平面中的几何图形)，或者是几何对象相同但是变换群不同(如仿射几何和欧氏几何的变换群分别是仿射变换群和保距变换群)。有了这三种几何作为具体背景，现在就可以回答这样一个问题：什么是几何学？换句话说，几何学的本质是什么？什么是几何学的基本问题？

1872年，德国数学家克莱因(F. Ch. Klein)在名叫埃尔兰根(Erlangen)的小城发表了著名的演说，这篇演说被后人称作是“埃尔兰根纲领”。克莱因在这篇演说中给几何学下了一个经典的定义：“几何学是研究空间在变换群下不变性质的一门学科。”这里所说的“空间”是很一般的，它可以是任何事物(研究对象)的集合体。按照克莱因这个几何

学的定义，可知几何学的基本问题有两个：一个是研究几何对象对于变换群的等价分类，另一个是研究几何对象对于变换群的不变性质和不变量．这两个基本问题是密切相关的，是克莱因几何学定义的两个侧面．比如说：设 P 是某种几何中的不变性质（或不变量），如果两个几何对象当中一个具有性质 P 而另一个不具有性质 P（或者两个对象的不变量 P 的数值不相等），则这两个几何对象在这种几何中必然不等价．所以，不变性质和不变量发现得愈多，就愈有助于几何对象的等价分类．

设 $P_1, \cdots, P_t$ 是某种几何学中的一些不变性质或不变量，S 是该几何学中某些几何对象构成的集合，如果 S 中两个几何对象等价，则当然应当有同样的 $P_1, \cdots, P_t$；反之，如果 S 中两个几何对象有同样的 $P_1, \cdots, P_t$，便可推出这两个几何对象必然等价，我们便称 $P_1, \cdots, P_t$ 是 S 中几何对象的**完全不变量**（**或不变性质**）**组**．例如：在欧氏几何中，取 S 为所有三角形构成的集合，P_1、P_2、P_3 分别是三角形三个边长（这是欧氏几何中的不变量），如果两个三角形具有同样的 P_1、P_2、P_3，即三组对应边相等，那末这两个三角形全等，即在欧氏几何中它们是等价的．所以，三角形三个边长是三角形的完全不变量组．类似地，“两角夹边”和“两边夹角”也是三角形的完全不变量组，而“三个角的大小”不是三角形的完全不变组．

寻求某类几何对象的完全不变量组，是几何学家最希望作的事情，因为这意味着把判定这类几何对象是否等价

具体归结为考查它们的某些不变性质是否一样或者某些不变量是否相等. 但是,在几何学中,寻求完全不变量组是件困难的工作. 在某些几何学中,甚至寻求不变性或不变量都很困难,只有很少的不变性和不变量被发现,离建立完全不变量组这一最终目标还很远. 在几何学中还有大量未解决的问题留待后人去研究和解决.

练 习 题（十二）

1. 对于欧氏几何的下列几何对象,写出它的一些完全不变量组.

(a) 平行四边形; (b) 椭圆.

2. 对于仿射几何的下列几何对象,写出它的完全不变量组.

(a) 共点的不同三直线; (b) 共线的三点; (c) 梯形.

3. 仿射变换

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y+b_1, \\ y'=a_{21}x+a_{22}y+b_2 \end{cases} \tag{*}$$

是保距变换的充分必要条件是

$$a_{11}^2+a_{21}^2=a_{12}^2+a_{22}^2=1, \quad a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0.$$

4. 如果(*)式是保距变换,则 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\pm 1$. 试问其逆是否也对?

5. 设(*)是保距变换. (a)如果 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1$, 则该保距变换必可表成形式 $\tau\cdot\sigma$, 其中 σ 是绕原点旋转某个角度, τ 是平移变换 $x'=x+b_1$, $y'=y+b_2$.

(b) 如果 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=-1$，则该保距变换必可表成形式 $\tau\cdot\sigma\cdot\lambda$，其中 τ 和 σ 同上，而 λ 是以 OX 为轴的反射变换：$x'=x$, $y'=-y$.

4. 谈谈非欧几何

在欧氏几何中，过直线外一点可以作一条，也仅可以作一条直线与原直线平行. 在公元前三世纪，古希腊数学家欧几里得把这个性质当作是一条公理，即所谓“平行公理”. 但是一些学者认为这条平行公理可以从其他公理推出来. 换句话说，他们认为：若其他公理均成立，那么在几何中必然有平行公理所叙述的结论. 有许多人为了“证明”平行公理，花费了大半生的精力. 但是给出的许多“证明”都是不正确的. 到了十九世纪二十年代，人们才认识到平行公理确实是欧氏几何中的一条公理，也就是说，它与所有别的公理是彼此独立的. 到了十九世纪中期，人们建立了许多非欧几何的模型. 在这些非欧几何中，欧氏几何的其他公理均成立，但是平行公理不成立. 至此，非欧几何才被人们普遍接受.

非欧几何可以分成两类，一类非欧几何中，平行公理被下列公理代替：任意两条不同的直线都相交. 我们在本书中介绍的射影几何，就属于这种非欧几何，因为射影平面中任意两条不同的射影直线均恰好交于一点. 又如，天文和航海中普遍采用的球面几何也是这种非欧几何. 这种几何的

“空间”是球面，研究对象是球面上的各种几何图形．球面上的“直线”是过球心的平面与该球面截出的“大圆”．球面上任意两个不同的大圆均恰好交于对顶的两点（图 3-10）．

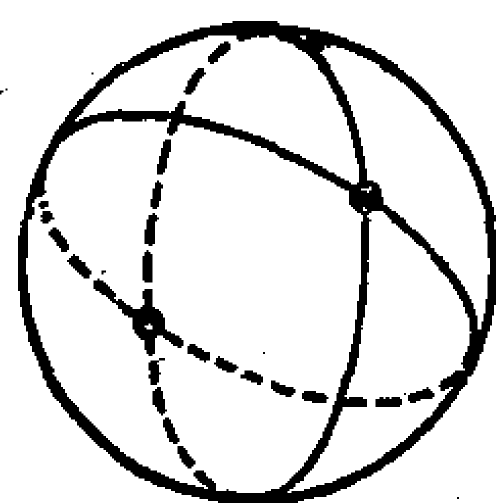


图 3-10

如果我们把球面上对顶的两个点看成是同一个点，那末在球面上任意两条直线（大圆）也都恰好交于一点．另一方面，所有欧氏几何的其他公理在球面几何中仍旧成立．比如说：过球面上任意两个不同的点（注意：对顶的两个点看作是同一点）均恰好有一条直线．在球面上两点之间的“线段”就是过此两点的大圆夹在两点之间的小弧．线段的长度就是这段圆弧的长度，它就是两点的距离，过球面一点的两条直线（大圆）的夹角就是两个大圆在此点的切线之间的夹角．球面上的变换即指保持任意两点（球面上）距离保持不变的保距变换．这些变换显然形成群．于是，两点距离自然是球面几何中的不变量，可以象欧氏几何一样证明：球面上两条直线的夹角也是不变量．我们还可定义另一个不变量：球面三角形的面积．在非欧几何中有许多性质跟欧氏几何很不相同．比如，在球面几何中，任意三角形的三个内角之和永远大于 180°！这里的三角形仍旧是不在同一直线上的三点之间联成的三条线段围成的球面几何图形．例如图 3-11 所示的三角形 NPQ，P 和 Q 在“赤道”上，而 N 是“北极”，那

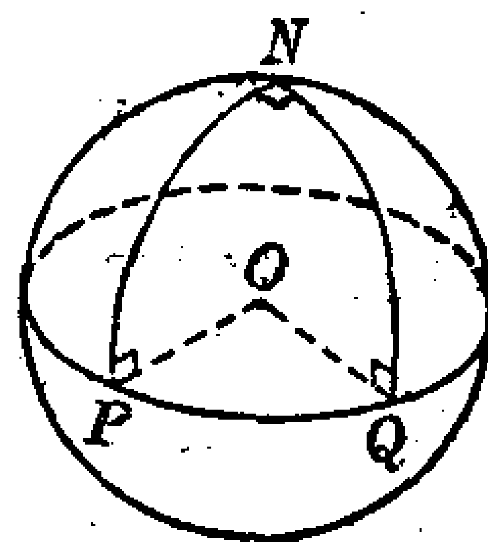


图 3-11

末这个三角形在 P 和 Q 处的内角都是直角，从而内角之和大于 $180°$.

非欧几何并不神秘，因为人们本来就生活在球面上. 由于地球半径很长，当我们在地球表面一个局部活动时，我们把它近似地看成是一个平面，而把两点最短距离看成是欧氏几何中的直线，但事实上它是大圆弧的一部分. 文学家把一片广阔的原野形容成是"一望无际"，但在几何学家看来这是平凡的事实，因为球面本来就是没有边际的. 当人们研究天文现象，或者进行全球性的航海活动时，欧氏几何已不适用，需要采用球面几何这样一种非欧几何.

另一种非欧几何是将平行公理改成：过直线外一点可以引多于一条直线与原直线不相交. 现在我们用前面学过的射影几何知识给出这种非欧几何的一个模型. 这种几何的"空间"是半径为 1 的单位圆的内部. 也就是说，在这种几何中，我们的研究对象是单位圆内的几何图形. 设 A 和 B 是单位圆内两个不同的点，则直线 AB 在单位圆内那部分就定义为在我们新几何中过 A 和 B 的直线. 因此，和欧氏几何一样，在我们新的几何中，过任意两个不同的点恰好可引一条直线. 设直线 AB 与单位圆周的交点为 P 和 Q，并且 P 在 BA 的延长线上而 Q 在 AB 的延长线上(图 3-12). 我们定义线段 AB 的长度为

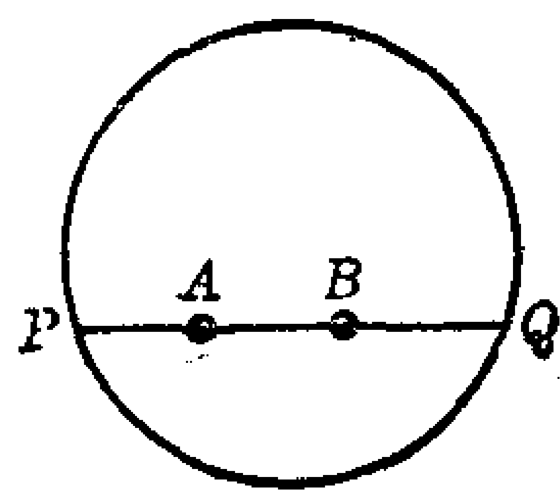


图 3-12

$$\overline{\overline{AB}}=\log(AB|QP),$$

其中$(AB|QP)$是四点的复比，即

$$(AB|QP)=\frac{AQ}{AP}\cdot\frac{BP}{BQ}.$$

因为A、B不被P、Q所分割，所以这个复比是一个正实数. 更进一步，由于上面对于P和Q两点的规定，知道$|AQ|>|BQ|$、$|BP|>|AP|$. 因此

$$(AB|QP)=\frac{|AQ|}{|BQ|}\cdot\frac{|BP|}{|AP|}>1.$$

所以当$A\neq B$时$\overline{\overline{AB}}=\log(AB|QP)$永远是正实数. 而当$A=B$时，

$$\overline{\overline{AA}}=\log(AA|QP)=\log\frac{(AQP)}{(AQP)}$$

$$=\log 1=0.$$

于是我们证明了距离$\overline{\overline{AB}}$也具有通常欧氏距离的如下性质:

性质1 设A和B是单位圆内两个点，则当$A\neq B$时，$\overline{\overline{AB}}$是正实数，而$\overline{\overline{AA}}=0$.

性质2 当A接近于P，或者B接近于Q时，$\overline{\overline{AB}}$均趋向于$+\infty$(无穷大).

这是由于当A接近P或者B接近Q时，AP或者BQ趋近于0，从而

$$(AB|QP)=\frac{AQ}{AP}\cdot\frac{BP}{BQ}$$

趋于$+\infty$，于是

$$\overline{\overline{AB}}=\log(AB|QP)$$

也趋于 $+\infty$.

所以，单位圆上的点可以看成是我们新几何中的无穷远点.

性质 3 如果 A、B、C 是单位圆内共线的三点，并且点 B 在线段 AC 上(图 3-11)，则

$$\overline{\overline{AB}}+\overline{\overline{BC}}=\overline{\overline{AC}}.$$

这是因为:

$$\begin{aligned}\overline{\overline{AB}}+\overline{\overline{BC}}&=\log(AB|QP)+\log(BC|QP)\\&=\log(AB|QP)(BC|QP)\\&=\log\frac{(AQP)}{(BQP)}\frac{(BQP)}{(CQP)}\\&=\log\frac{(AQP)}{(CQP)}=\log(AC|QP)\\&=\overline{\overline{AC}}.\end{aligned}$$

接下来，我们要讲明新几何中的变换群是什么. 我们自然要考虑射影平面上将单位圆内部变成单位圆内部的那些射影变换所构成的集合. 不难看出，这样的射影变换全体形成一个变换群，表示成 $\mathfrak{G}$，这就是我们新几何的变换群.

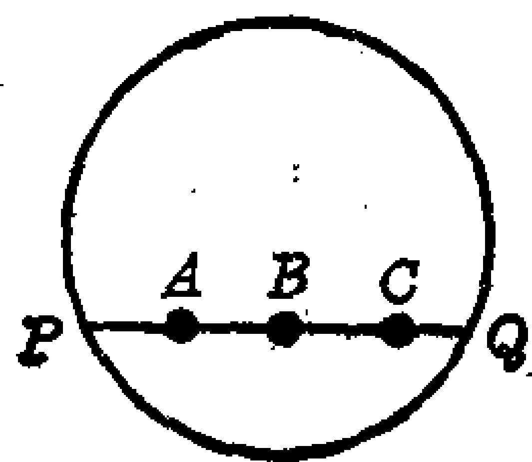


图 3-13

性质 4 $\mathfrak{G}$ 中每个变换 σ 对于新定义的距离均是保距变换.

证明 设 A、B 是单位圆内任意两个点，AB 和单位圆的交点是 P 和 Q. 设 σ 把 A、B、P、Q 分别变为 A'、B'、P'、

Q'，则 P'、Q' 在 $A'B'$ 上．由于 σ 是把单位圆内部变成单位圆内部的射影变换，利用连续性原理，可知 σ 把单位圆周上的点变为单位圆周上的点，于是 P' 和 Q' 均在单位圆周上。换句话说，P'、Q' 恰好是 AB 与单位圆周的两个交点．由射影变换 σ 保持复比，可知

$$(A'B'|Q'P')=(AB|QP)\geqslant 1.$$

于是

$$\overline{\overline{A'B'}}=\log(A'B'|Q'P')=\log(AB|QP)=\overline{\overline{AB}},$$

从而 $\mathfrak{G}$ 中每个变换均是保距变换.

对于单位圆内两个几何图形，如果存在变换群 $\mathfrak{G}$ 中某个变换，将其中一个几何图形变成另一个几何图形，象欧氏几何中那样，我们称这两个图形是全等的．由于 $\mathfrak{G}$ 中变换都是保距的，因此若单位圆内 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 全等，则对应边长度必然相等，即

$$\overline{\overline{AB}}=\overline{\overline{A'B'}},\quad \overline{\overline{BC}}=\overline{\overline{B'C'}},\quad \overline{\overline{CA}}=\overline{\overline{C'A'}};$$

反之，如果单位圆内两个三角形的三组对应边相等，这两个三角形是否全等呢？也就是说，是否存在着 $\mathfrak{G}$ 中的变换把 A、B、C 分别变成 A'、B'、C' 呢？下一个性质表明，答案是肯定的．

性质5　设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 是单位圆内两个三角形．

$$\overline{\overline{AB}}=\overline{\overline{A'B'}},\quad \overline{\overline{BC}}=\overline{\overline{B'C'}},\quad CA=\overline{\overline{C'A'}},$$

则存在 $\mathfrak{G}$ 中的变换 σ，把 A、B、C 分别变成 A'、B'，C'.

证明　设 AB、BC、CA 与单位圆交于 P、Q、R、S、T、

L. $A'B'$、$B'C'$、$C'A'$ 与单位圆交点为 P'、Q'、R'、S'、T'、L'(如图 3-14 所示，为了容易识别，我们把同一个单位圆画在两处)．由于 P、Q、R、S 当中任意三点均不共线，而 P'、Q'、R'、S' 也有同样性质，从而在射影平面上存在射影变换 σ，把 P、Q、R、S 分别变成 P'、Q'、R'、S'，于是 σ 把 PQ 和 RS 的交点 B 变成 $P'Q'$ 和 $R'S'$ 的交点 B'．又由于

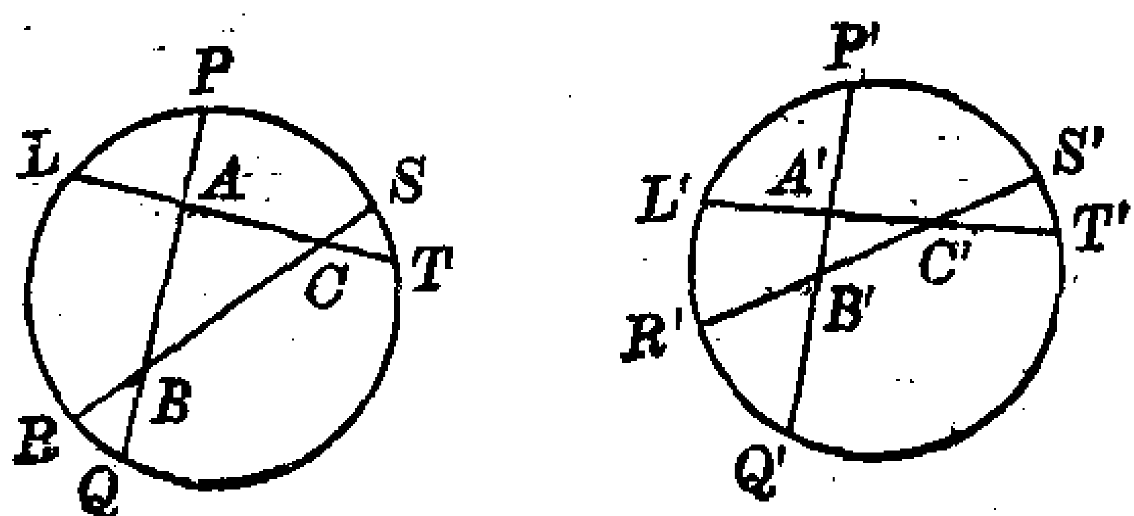


图 3-14

$$\log(AB|QP)=\overline{\overline{AB}}=\overline{\overline{A'B'}}=\log(A'B'|Q'P'),$$

而 σ 又保持复比，从而 σ 把 A 变成 A'．同样可知 σ 把 C 变成 C'．我们只需再证 σ 把 L 变成 L' 就可以了．因为这时 P、Q、R、S、L 五个点唯一地决定了一个圆锥曲线，这个圆锥曲线就是单位圆．同样地，P'、Q'、R'、S'、L' 也唯一决定了一个圆锥曲线——单位圆．因此 σ 把单位圆变成单位圆．由于 σ 把单位圆内点 A 变成单位圆内点 A'，利用连续性原理可知 σ 必然把单位圆内部变成单位圆内部．换句话说，σ 是 $\mathfrak{G}$ 中的变换，并且 σ 把 A、B、C 分别变成 A'、B'、C'，从而 σ 即为所求．

为了证明 σ 把 L 变成 L'，我们要利用本书所讲的第一个定理——帕斯卡定理．我们考虑单位圆上六个点 T'、L'、P'、Q'、S'、R'．设 $T'L'$ 和 $Q'S'$ 的交点为 D'，$L'P'$ 和 $S'R'$ 的交点为 M'，$P'Q'$ 和 $R'T'$ 的交点为 N'．由帕斯卡定理可知 D'、M'、N' 共线(图 3-15)．根据这条性质，如果我们

已知单位圆上四点 P'、Q'、R'、S'，又知直线 $A'C'$ 与单位圆的一个交点 L'，我们可以按下方式求 $A'C'$ 与单位圆的另一个交点 T'：先作 $P'L'$ 与 $R'S'$ 的交点 M'，再作 $A'C'$ 与 $S'Q'$ 的交点 D'，然后作 $M'D'$ 与 $P'Q'$ 的交点 N'，最后，$R'N'$ 与 $A'C'$ 的交点便是所求的点 T'.

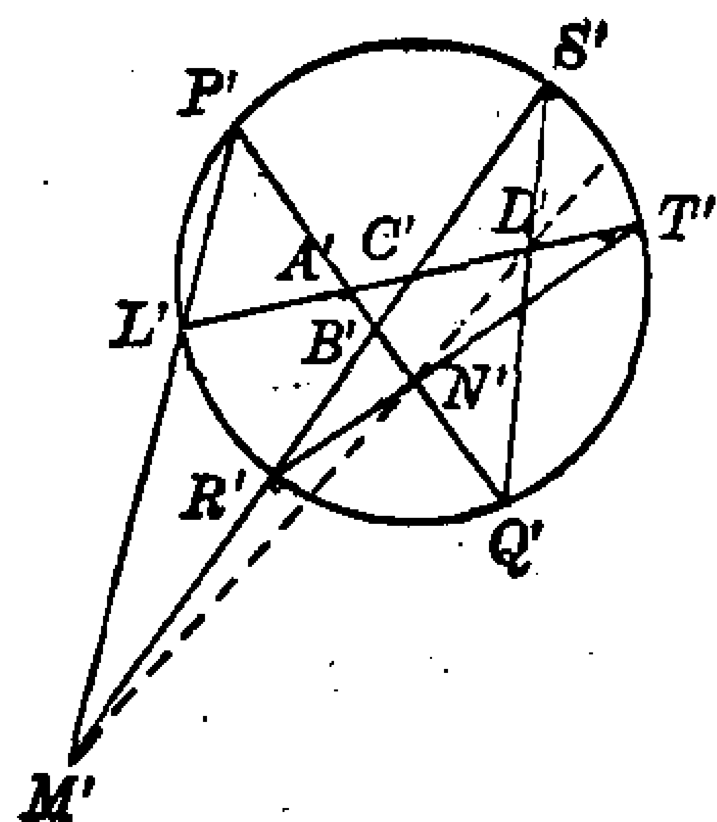


图 3-15

我们已经知道 σ 把 P、Q、R、S、A、B、C 分别变成 P'、Q'、R'、S'、A'、B'、C'. 设 σ 把 L 和 T 分别变成 L'' 和 T''. 令 σ 把单位圆变成某个圆锥曲线 Ω. 由于 P、Q、R、S、T、L 是单位圆上六个点，所以 P'、Q'、R'、S'、L''、T'' 均在 Ω 上. 因为帕斯卡定理对于任意圆锥曲线均成立，因此我们仍旧可按上述方法从 Ω 上的五个点 P'、Q'、R'、S'、L'' 求第六个点 T''. 如果 $L''\neq L'$，则有两种情形：(1) L'' 在线段 $L'A'$ 之间，这时按上述方法绘出的点 T'' 在线段 $D'T'$ 之间. 不难看出，在这种情形下，

$$(A'C'|T'L')=\frac{A'T'}{C'T'}\cdot\frac{C'L'}{A'L'}<\frac{A'T''}{C'T''}\cdot\frac{C'L''}{A'L''}$$
$$=(A'C'|T''L'').$$

另方面，由 $\overline{A'C'}=\overline{AC}$ 可知 $(A'C'|T'L')=(AC|TL)$，而由 σ 保持复比可知

$$(AC|TL)=(A'C'|T''L''),$$

于是应当有

$$(A'C'|T'L')<(A'C'|T''L'').$$

这就产生矛盾．(2)L'' 在 $A'L'$ 的延长线上，这时按上述方法绘出的点 T'' 在 $D'T'$ 的延长线上，从而

$$(A'C'|T'L')>(A'C'|T''L'').$$

这又导致矛盾．综合上述，可知 $L''=L'$，即 σ 把 L 变成 L'．这就证明了性质 5.

不难看出，以单位圆圆心 O 为中心的中心对称，和绕 O 的每个旋转，都是 $\mathfrak{G}$ 中的变换．但是，从性质 5 可知，$\mathfrak{G}$ 中不只有这些变换，因为仅仅这些变换不能满足性质 5 的要求．所以我们新几何的变换群 $\mathfrak{G}$ 是足够大的．由性质 5 还知道，三角形的三个边长是三角形的完全不变量组．也就是说，三角形的"边边边"定理在我们新的几何中仍然成立：两个三角形全等当且仅当三组对应边长相等．我们还可以在新的几何中定义两直线的夹角．我们在这里不谈角度的确切定义，只想指出以下几点事实：(1)角度是我们新几何中的不变量．也就是说，$\mathfrak{G}$ 中变换保持直线的夹角不变．(2)关于三角形全等的"角边角"和"边角边"定理，在新几何中仍旧成立．(3)如果两条直线相交于单位圆上(即相交在"无穷远点")，则这两条直线的夹角为 0(即两直线"平行")．

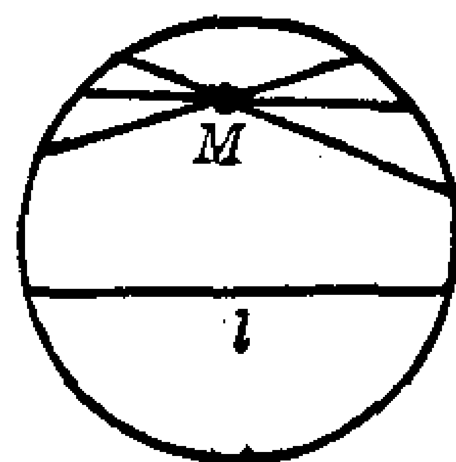


图 3-16

我们还可以定义三角形的面积，它也是变换群 $\mathfrak{G}$ 之下的不变量．所以，新几何与欧氏几何有许多相似之处．事实上，欧氏几何当中除了平行公理之外的全部其他公理，在我们的

新几何中均成立；但是，平行公理在我们这里显然不成立，因为过直线 l 外一点 M 可以引许多条直线与 l 不相交(图 3-16)，所以这是另一种类型的几何．在这种几何中，每个三角形的内角之和都小于 180°！例如，当三角形的三个顶点非常接近单位圆周时，三个内角都非常小(这是由于交于单位圆周上的两条直线夹角为零)，从而三内角之和可以任意接近于零！

详细探讨非欧几何不是本书的主要目的，所以关于非欧几何我们就只介绍这些．我们在前两章重点讲述了平面射影几何中的丰富内容和优美的结果，以及射影几何的一些应用．在这一章里我们扩大了视野，进行"横向联系"，从射影几何出发介绍了相关连的另一些几何学．事实上，在现实世界和理性世界中，还存在着许多其他的几何学．例如，爱因斯坦狭义相对论是一种四维的非欧几何学(四维空间是通常的三维空间再加上时间)；又如，有一种几何学研究图形连续变换下的不变性质，这种几何学叫作"拓朴学"．还有微分几何学，代数几何学等等．在这些几何学中，有许多问题至今未能解决．它们等待年轻一代的几何学家去研究，去揭示新的规律，去开发新的几何学．

部分练习题提示和答案

练 习 题（一）

1. 证明与 P 在圆外的情形类似.

2. 过 P 作垂直于 l 的直线，设垂足为 Q. 令 $Q'=\pi(Q)$. 则反演 π 将直线 l 变成以 PQ' 为直径的圆（但是要去掉点 P，参见图 1）.

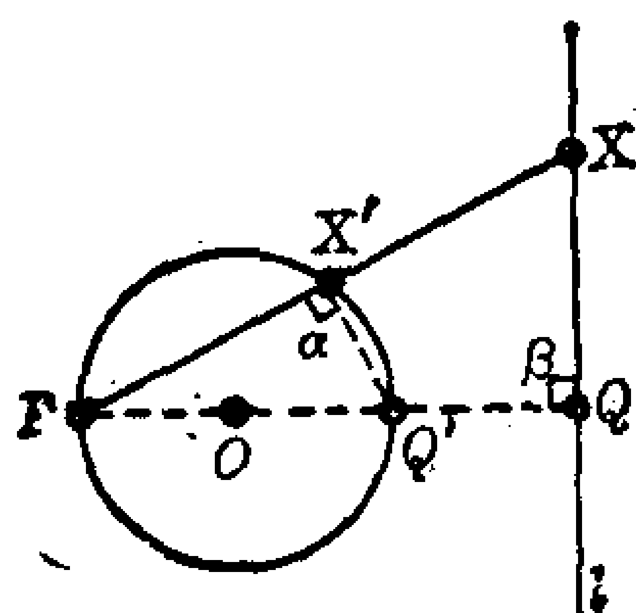


图 1

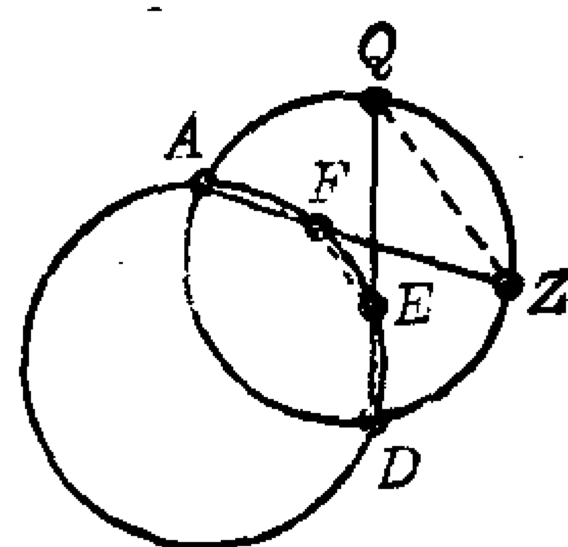


图 2

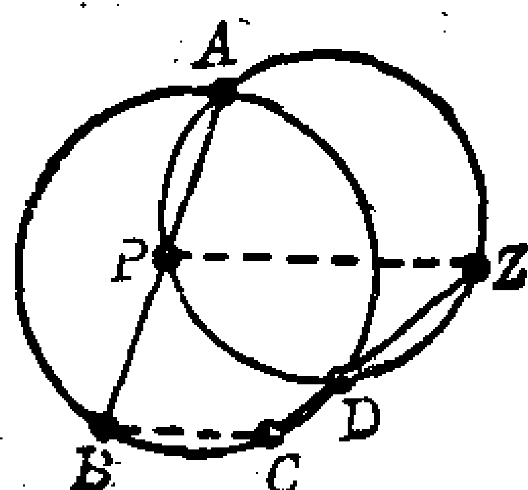


图 3

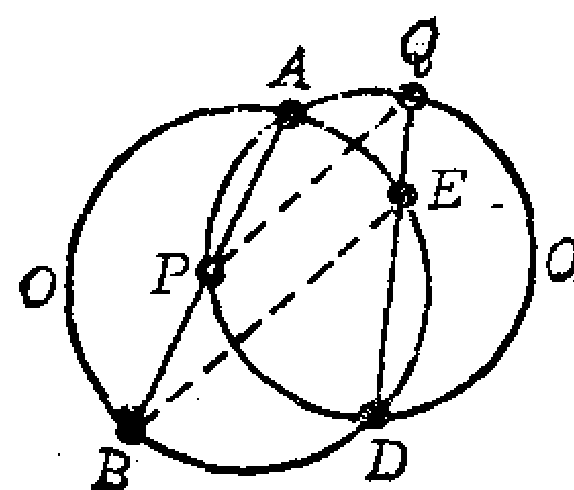


图 4

3．还有图 2，图 3 和图 4 所示的三种情形．证明时，均加补助线 AD．

练 习 题（二）

2．以无穷远点为中心的中心射影 σ 把平面 π 上无穷远直线变成平面 π 上无穷远直线．如果 F 是平面 π 上的几何图形，并且与无穷远直线交于 N 个点，则 σ 把 F 变成平面 π 上的几何图形，与无穷远直线也交于 N 个点．由于椭圆，双曲线和抛物线与无穷远直线分别交于 0、2、1 点，因此它们通过 σ 仍旧分别变成椭圆、双曲线和抛物线．

3．利用如下事实：双曲线是与两固定点距离之差为常数的点的轨迹，抛物线是与一固定点和固定直线等距离的点的轨迹．

4．若通过 N 次中心射影可把 F 变成 F'，而通过 M 次中心射影可把 F' 变成 F''，则先通过前 N 次再通过后 M 次（即 $N+M$ 次）中心射影，就把 F 变成 F''．于是，若 F 和 F' 射影等价而 F' 和 F'' 射影等价，则 F 和 F'' 射影等价．

练 习 题（三）

1．设 $\triangle ABC$ 满足题中条件．直线 CA 与 PQ 交于点 R．如果 $\triangle A'B'C'$ 也满足题中条件，利用德沙格定理证明 $C'A'$ 也过点 R（参见图 5）．

2．证明与上题类似，但是这里使用德沙格定理的逆定理．

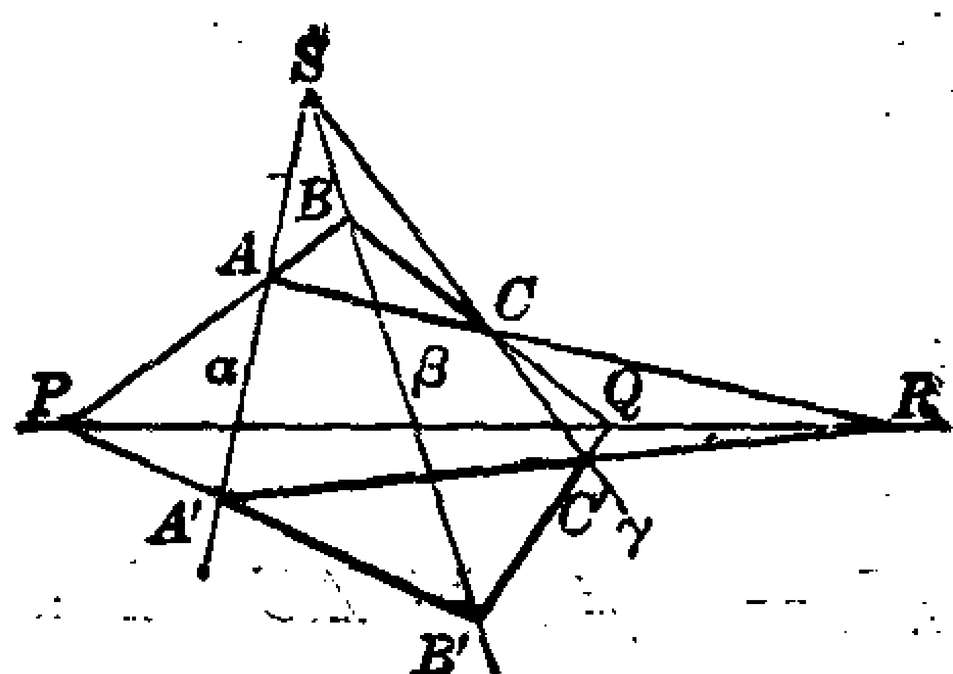


图 5

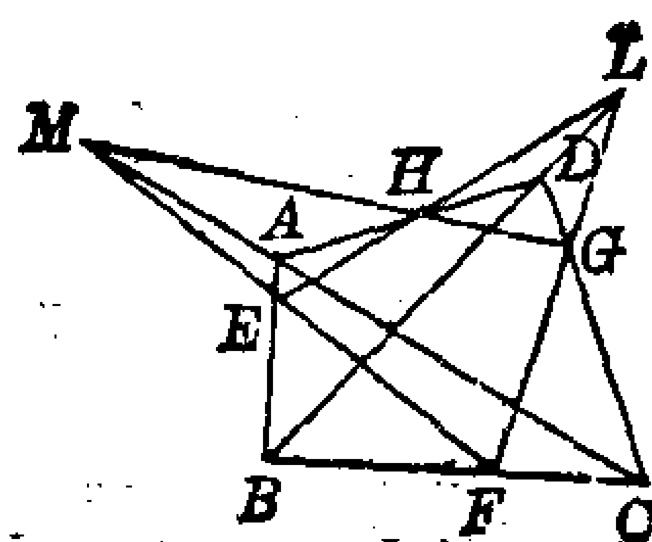


图 6

3. 将德沙格定理用于 $\triangle HDG$ 和 $\triangle EBF$（见图 6）.

4. 将德沙格定理用于 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PQR$.

5. 不妨设 AA'、BB'、CC' 的交点和 AB'、BC'、CA' 的交点均是无穷远点. 于是

$$AA' \parallel BB' \parallel CC', \quad AB' \parallel BC' \parallel CA'$$

（见图 7）. 延长 CB' 与 $A'A$ 交于 D. 令 $BB'=b$、$CC'=c$、$AB'=e$、$BC'=f$、$AD=d$，设 $A'B$ 与 CB' 交于 O，则

$$\frac{DO}{B'D}=\frac{d+c+b}{d+c}, \quad \frac{B'D}{DC}=\frac{d}{d+c+b}.$$

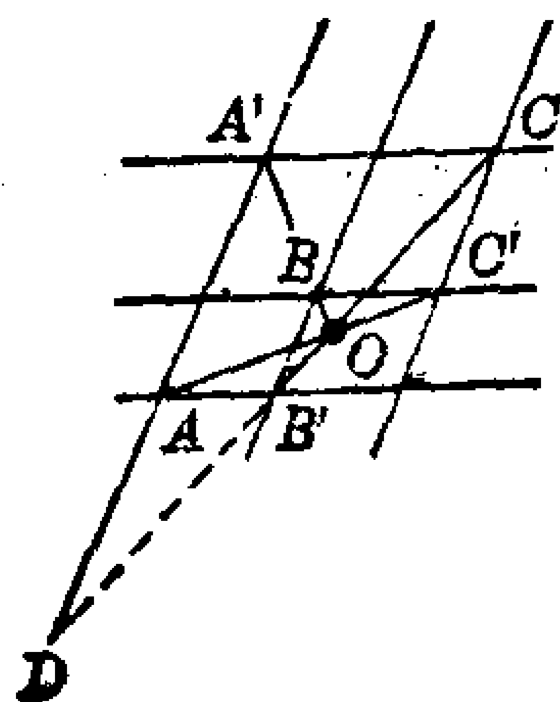


图 7

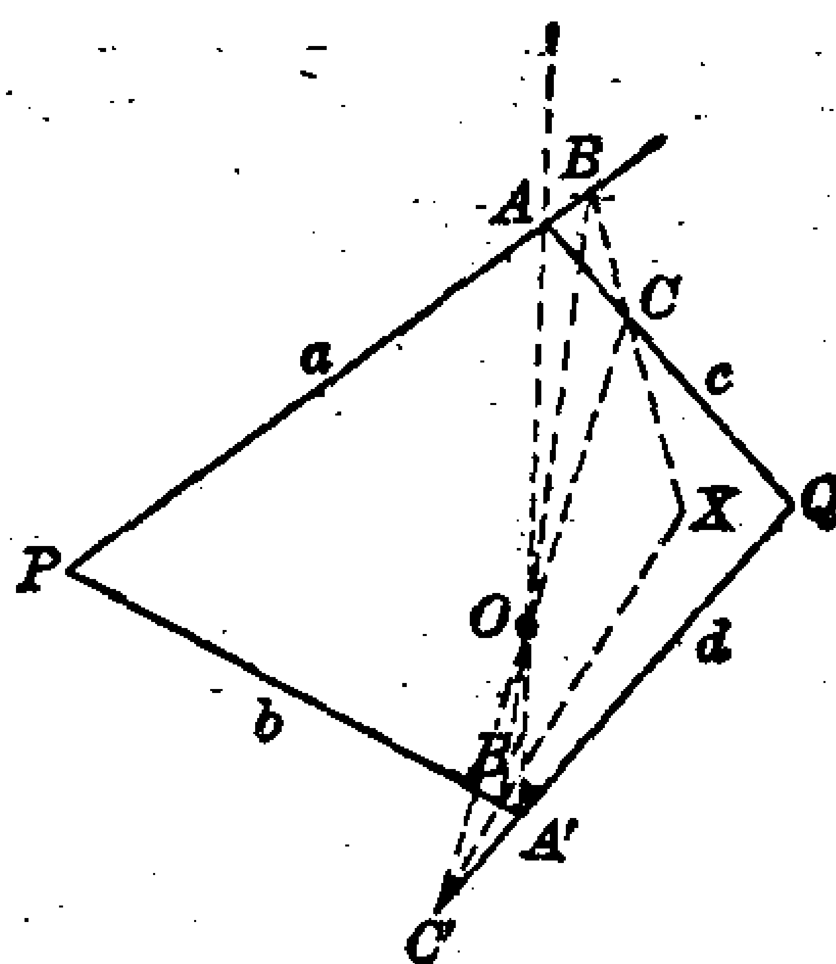


图 8

于是 $$\frac{DO}{DC}=\frac{d}{d+c}.$$

设 AC' 与 CB' 交于 O'，则

$$\frac{DO'}{DC}=\frac{d}{d+c}.$$

于是 $DO'=DO$. 从而 O 和 O' 是同一个点，即 AC'、BA'、CB' 共点.

6. 设 A 和 A' 分别是 a 与 c 的交点和 b 与 d 的交点. 在 AA' 上任取一点 O，过 O 作一直线，与 c 和 d 分别交于点 C 和 C'. 过 O 作一直线，与 a 和 b 分别交于点 B 和 B'. 由德沙格定理，即知 BC 和 $B'C'$ 的交点 X 在 PQ 上. 再如此法画出 PQ 上另一点 X'，则 XX' 即为所求(图 8).

7. 对于 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PQR$，利用德沙格定理.

练 习 题（四）

3. 设 A, C, D, F 是圆锥曲线 Ω 的内接四边形，设 Ω 过点 A 和 D 的两切线交于点 P，AC 和 DF 交于 Q，AF 和 CD 交于 R，则 P、Q、R 共线.

4. 利用定理 A.

5. (a) 由于$(ABD)=1$; (b) 由于$(ABC)=-1$ 的充分必要条件是 C 为线段 AB 的中点.

6. 与定理 1 的证明类似.

练 习 题（五）

1. 一条直线. 证明：设 l 和 l' 交于点 O. 在 l 和 l' 上

分别取点 R 和 Q，使得 $RA=OA'$，$QA'=OA$. 设 QP 与 l 和 AA' 分别交于 $\bar{R}$ 和 S. 考虑以 A' 为中心的线束，可知

$$(PS|Q\bar{R})=(XA|O\bar{R}).$$

考虑以 A 为中心的线束，可知

$$(PS|Q\bar{R})=(X'A'|QO).$$

但是$(X'A'|QO)=(XA|OR)$，于是

$$(XA|OR)=(XA|O\bar{R}).$$

因此 $R=\bar{R}$，即 P 在直线 RQ 上，从而轨迹是一条直线(图 9).

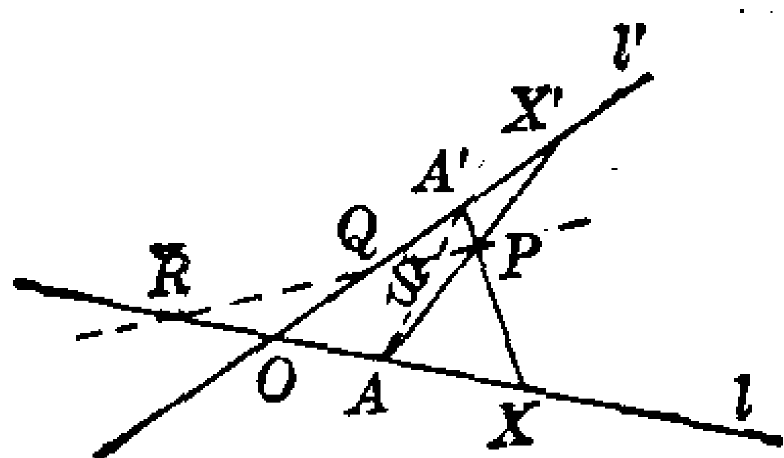


图 9

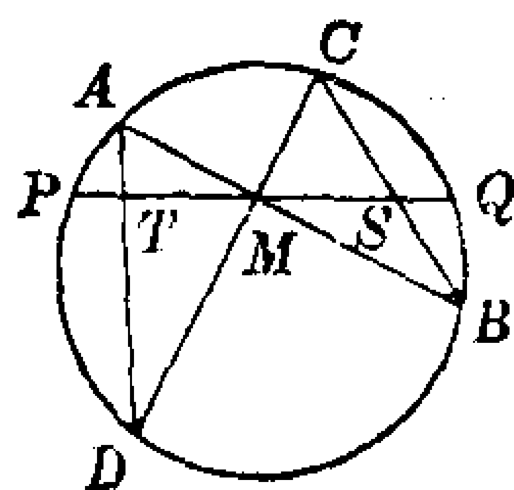


图 10

2. 证明：

$$(PT|MQ)=(PM|SQ),$$

从而

$$\frac{PM}{TM}\cdot\frac{TQ}{PQ}=\frac{PS}{MS}\cdot\frac{MQ}{PQ}.$$

由于 $PM=MQ$，从而

$$\frac{TQ}{TM}=\frac{PS}{MS}.$$

于是

$$\frac{TQ-TM}{TM}=\frac{PS-MS}{MS},$$

即 $$\frac{MQ}{TM}=\frac{PM}{MS}.$$

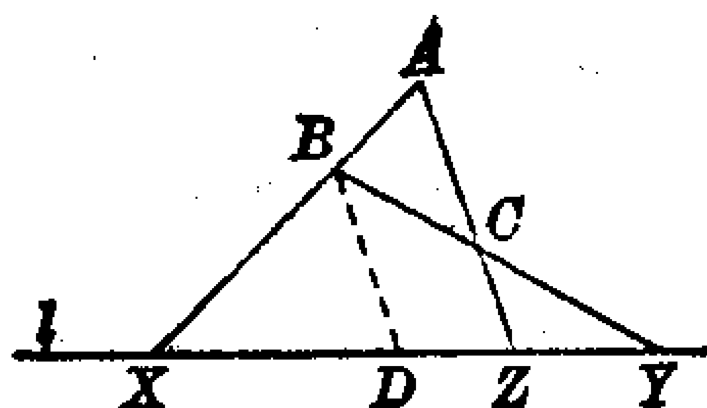


图 11

由于 $MQ=PM$，从而 $TM=MS$（图 10）.

3. 过 B 作直线平行与 AC，并且与直线 l 交于 D，则 BD 和 AC 交于无穷远点 P（图 11）．考虑以 B 为中心的线束，则

$$(XY|ZD)=(AC|ZP)=(ACZ),$$

即 $$\frac{XZ}{YZ}\cdot\frac{YD}{XD}=\frac{AZ}{CZ}.$$

但是 $\frac{XZ}{XD}=\frac{XA}{XB}$，$\frac{YD}{YZ}=\frac{YB}{YC}$，所以

$$\frac{XA}{XB}\cdot\frac{YB}{YC}=\frac{AZ}{CZ},$$

即 $$\frac{AX}{BX}\cdot\frac{BY}{CY}\cdot\frac{CZ}{AZ}=1.$$

这个证明表面看起来与本书第 11 页中的证明差不多，但仍有优越之处：我们这里的直线 l 可以任意选取，只要 XZ、YZ、…… 等都看成是有向线段的长度，则结论均成立.

4. 由于 A、B、C 是三个不同的点，因此 $(ABC)\neq 0$. 于是，在直线 l 上存在唯一的点 D，使得 $(ABD)=(ABC)\cdot\alpha$，即

$$(AB|DC)=\frac{(ABD)}{(ABC)}=\alpha.$$

5. 设 A_1A_3 与直线 l 交于 X_3'，…，A_1A_{n-1} 与直线 l

交于 X'_{n-1}. 则由第 3 题所述的梅内劳斯定理可知:

$$(A_1A_2X_1)(A_2A_3X_2)(A_3A_1X'_3)=1,$$

$$(A_1A_3X'_3)(A_3A_4X_3)(A_4A_1X'_4)=1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(A_1A_{n-1}X'_{n-1})(A_{n-1}A_nX_{n-1})(A_nA_1X_n)=1.$$

将这些等式相乘, 再利用公式 $(ABC)=(BAC)^{-1}$, 即得结论.

7. 设 OB 与 AC 交于 A''(图 12), 则

$$(OA, OB|OC, l)$$
$$=(AA''|CB')=(C'O|A'B')$$
$$=(A'B'|C'O).$$

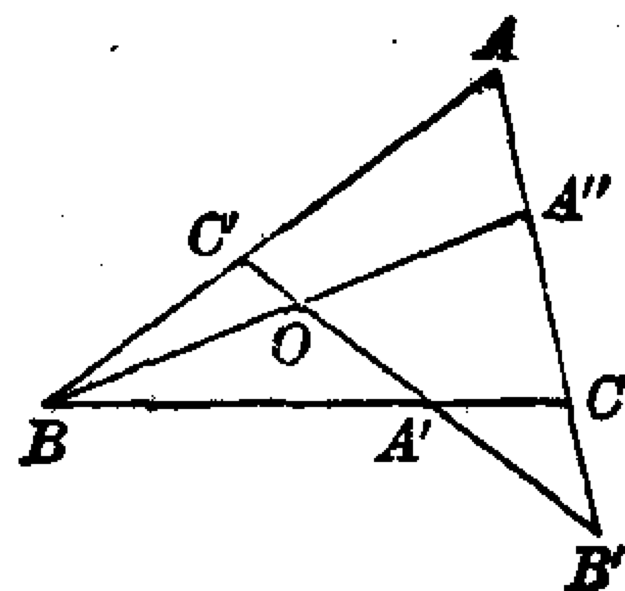


图 12

8. 对于圆锥曲线 Ω 的内接六边形 $AUVBQP$, 利用帕斯卡定理.

练 习 题 (六)

2. 由 $(AB|CD)=-1$ 可知

$$\frac{AC}{AD}=-\frac{BC}{BD}.$$

于是

$$\frac{AC+AD}{AD}=\frac{BD-BC}{BD},$$

即

$$\frac{AM}{AD}=\frac{MD}{BD}.$$

于是 $$\frac{AM}{AD-AM}=\frac{MD}{BD-MD},$$

即 $$\frac{AM}{MD}=\frac{MD}{BM}.$$

这就是 $AM\cdot BM=CM^2$(图 13).

3. 考虑完全四边形 $AEODBC$, 利用定理 7.

4. $(AB|CD)=-1$ 相当于 $AO\cdot BO=OP^2$(第 2 题), 而这又相当于 OP 为圆 O' 的切线, 即相当于圆 O 和圆 O' 正交.

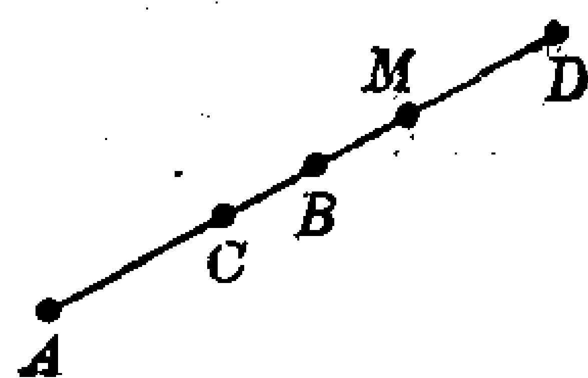


图 13

5. 由于$(AB|CD)=\frac{1}{(AB|DC)}$, 从而 D 变为 C 的充分必要条件是$(AB|CD)^2=1$, 即$(AB|CD)=-1$. (注意$(AB|CD)\neq1$.)

6. 令 A_{ij} 是 l_i 和 l_j 的交点, A'_{ij} 为 l'_i 和 l'_j 的交点, 则 A_{12}、A_{23}、A_{34}、A_{41} 任意三点均不共线, A'_{12}、A'_{23}、A'_{34}、A'_{41} 也如此. 于是, 存在唯一的射影变换, 把 A_{12}、A_{23}、A_{34}、A_{41} 分别变成 A'_{12}、A'_{23}、A'_{34}、A'_{41}. 验证这是唯一的射影变换将 l_1、l_2、l_3、l_4 分别变为 l'_1、l'_2、l'_3、l'_4.

7.

$$\begin{aligned}&(EF|PQ)\\&=(AE,\ AF|AC,\ AD)\\&=(BE,\ BF|BC;\ BD)\\&=(EF|P'Q').\end{aligned}$$

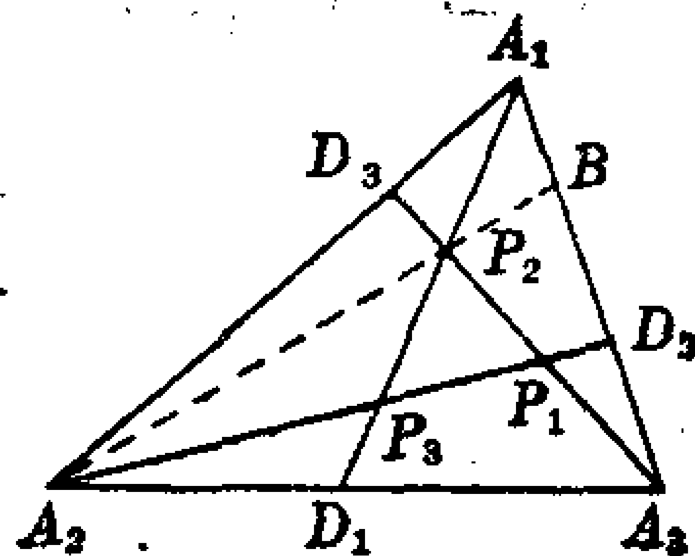


图 14

8. 设 $\frac{A_2D_1}{D_1A_3}=\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{A_3D_2}{D_2A_1}=\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{A_1D_3}{D_3A_2}=\frac{a_3}{b_3}$. 令

A_2P_2 和 A_1A_3 交于 B（图 14）。将梅内劳斯定理用于 $\triangle A_1A_2D$ 和截线 $D_3P_2A_3$，可知

$$\frac{A_1D_3}{D_3A_2}\cdot\frac{A_2A_3}{A_3D_1}\cdot\frac{D_1P_2}{P_2A_1}=-1.$$

再用于 $\triangle A_1D_1A_3$ 和截线 A_2P_2B，可知

$$\frac{A_1P_2}{P_2D_1}\cdot\frac{D_1A_2}{A_2A_3}\cdot\frac{A_3B}{BA_1}=-1.$$

于是
$$\frac{A_1D_3}{D_3A_2}\cdot\frac{D_1A_2}{A_3D_1}\cdot\frac{A_3B}{BA_1}=1.$$

从而
$$\frac{BA_1}{A_3B}=\frac{a_1a_3}{b_1b_3}.$$

于是

$$(A_1D_1|P_2P_3)=(A_1A_3|BD_2)$$
$$=\frac{A_1B}{A_1D_2}\cdot\frac{A_3D_2}{A_3B}=\frac{a_1a_2a_3}{b_1b_2b_3}.$$

同样可证
$$(A_2D_2|P_3P_1)=(A_3D_3|P_1P_2)$$
$$=\frac{a_1a_2a_3}{b_1b_2b_3}.$$

注：由本题可知：$P_2=P_3$ 的充分必要条件是

$$\frac{a_1a_2a_3}{b_1b_2b_3}=1.$$

而 $P_2=P_3$ 相当于 A_1D_1，A_2D_2，A_3D_3 共点。从而塞瓦定理可由本题推出。

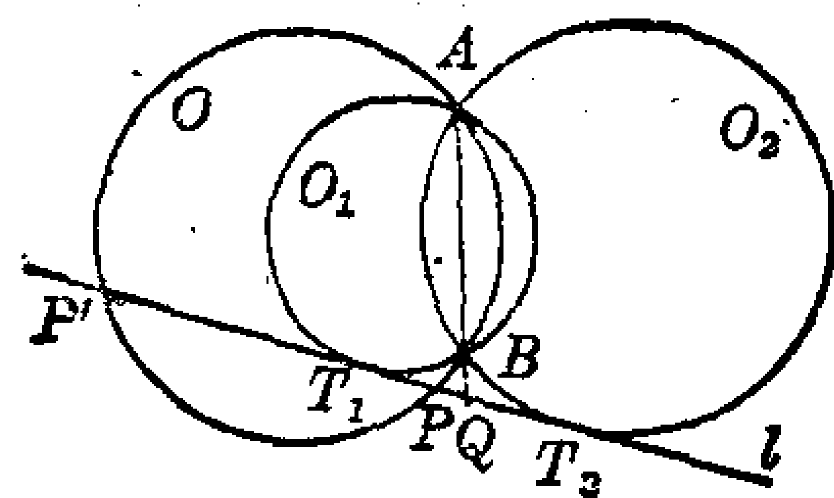


图 15

9. 设 AB 与 l 交于点 Q（图 15）。令 $QT_1=x$、$QP=y$，则 $QT_2^2=QT_1^2=x^2=QA\cdot QB$

$=QP\cdot QP'$. 于是

$$QP'=\frac{x^2}{y}, \quad PT_1=x-y, \quad P'T_1=-\frac{x(x-y)}{y},$$

$$PT_2=-(x+y), \quad P'T_2=-\frac{x(x+y)}{y}.$$

由此即知 $$(PP'|T_1T_2)=-1.$$

10. 若$(AB|CD)=-1$,则

$$\frac{DA}{CA}=\frac{BD}{CB},$$

即 $$\frac{CA-CD}{CA\cdot CD}=\frac{CD-CB}{CB\cdot CD},$$

即 $$\frac{1}{CD}-\frac{1}{CA}=\frac{1}{CB}-\frac{1}{CD},$$

即 $$\frac{2}{CD}=\frac{1}{CA}+\frac{1}{CB}.$$

另一方面,由

$$\frac{2}{CD}=\frac{1}{CA}+\frac{1}{CB},$$

可反推出 $$(AB|CD)=-1.$$

11. 线束AE、AC、AB、AD与直线BD分别截于点P、O、B、D,其中P是BD上的无穷远点,O为线段BD的中点,于是

$$(AE,\ AC|AB,\ AD)=(PO|BD)$$
$$=\frac{OD}{OB}=-1.$$

12. 命题只涉及射影不变性,从而可设Ω是圆. 而由本书第63页的例2即知当Ω为圆时命题成立.

练 习 题（七）

1．(a) $[0:0:1]$．(b) $[1:0:0]$（无穷远直线）．

2．(a) $(1:-1:0)$．(b) $(0:1:0)$．

3．$(ab|cd)=\frac{1}{2}$．

4．$x_0'=-x_1+x_2$，$x_1'=-x_0+x_2$，$x_2'=-x_0-x_1+x_2$．

5．交点为$(x_0:x_1:x_2)$，其中$x_i=(b_0c_0+b_1c_1+b_2c_2)a_i-(a_0c_0+a_1c_1+a_2c_2)b_i$．$(i=0, 1, 2)$

6．$(2:-1-\sqrt{5}:3+\sqrt{5})$、$(2:-1+\sqrt{5}:3-\sqrt{5})$为两切点，对应切线为$[3+\sqrt{5}:2+2\sqrt{5}:2]$和$[3-\sqrt{5}:2-2\sqrt{5}:2]$．

7．$x_0'=x_0+x_2$，$x_1'=x_1+x_2$，$x_2'=x_0+x_1+x_2$．

练 习 题（八）

1．**定理A′**　设b、c、d、e、f是圆锥曲线Ω的外切五边形的五条边．设直线y是b、c交点和f、e交点的连线，直线x是c、d交点和b、f交点的连线，直线z是b的切点和d、e交点的连线．则x，y，z共点（图16）．

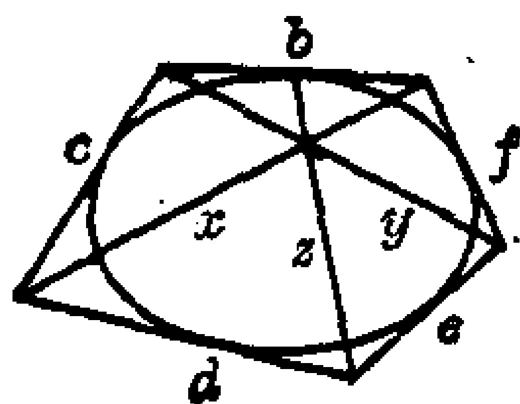


图　16

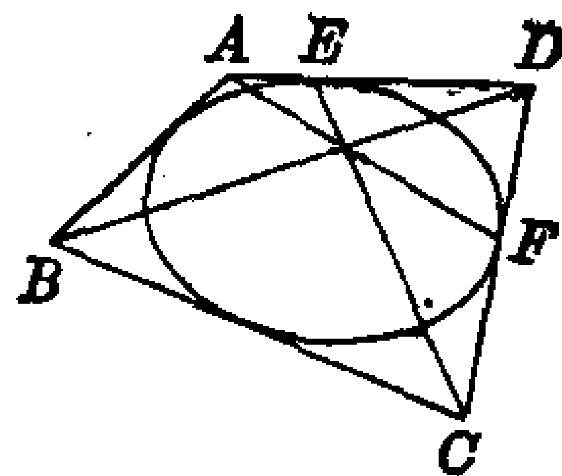


图　17

定理 B′ 设 $ABCD$ 是圆锥曲线 Ω 的外切四边形，边 AD 和 DC 的切点分别为 E、F，则 AF、CE、BD 共点(图 17).

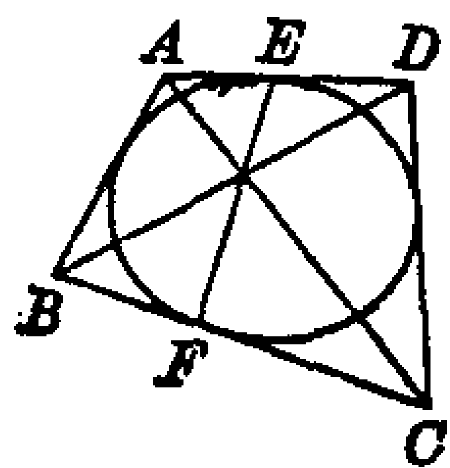


图 18

第 48 页练习题第 3 题的配极对偶：设 $ABCD$ 是圆锥曲线 Ω 的外切四边形，E 和 F 分别是边 AD 和 BC 上的切点，则 EF、AC、BD 共点(图18).

2. 设 $[a_0:a_1:a_2]$ 和 $[b_0:b_1:b_2]$ 是两条不同的射影直线，则它们的交点和点 $(c_0:c_1:c_2)$ 的连线为 $[x_0:x_1:x_2]$，其中

$$x_i=(b_0c_0+b_1c_1+b_2c_2)a_i-(a_0c_0+a_1c_1+a_2c_2)b_i \quad (i=0,\ 1,\ 2).$$

(假设点 $(c_0:c_1:c_2)$ 不是 $[a_0:a_1:a_2]$ 和 $[b_0:b_1:b_2]$ 的交点.)

3. 射影变换 σ 把线束 a、b、c、d 中的 a 和 b 保持不变，把 c 变为 d(其中 a、b、c、d 是线束中四条不同的射影直线). 则 σ 把 d 变为 c 的充分必要条件是 $(ab|cd)=-1$.

4. 由于题中只涉及射影不变性，从而可设 Ω 是圆. 这时由本书第 63 页的例 2，即知命题正确.

5. 如果 Ω 是双曲线，过 Ω 的对称中心 O 作 Ω 的两条切线即是 Ω 的两条渐近线，这两条渐近线上的无穷远点均是切点，从而这两个无穷远点的连线(即无穷远直线)是 O 的极线. 换句话说，无穷远直线的极点是双曲线 Ω 的中心 O(见图 19(i)).

如果 Ω 是抛物线，则无穷远直线为 Ω 的切线，切点为 Ω 的对称轴上的无穷远点 M_∞(图 19(ii))，于是 M_∞ 即为无

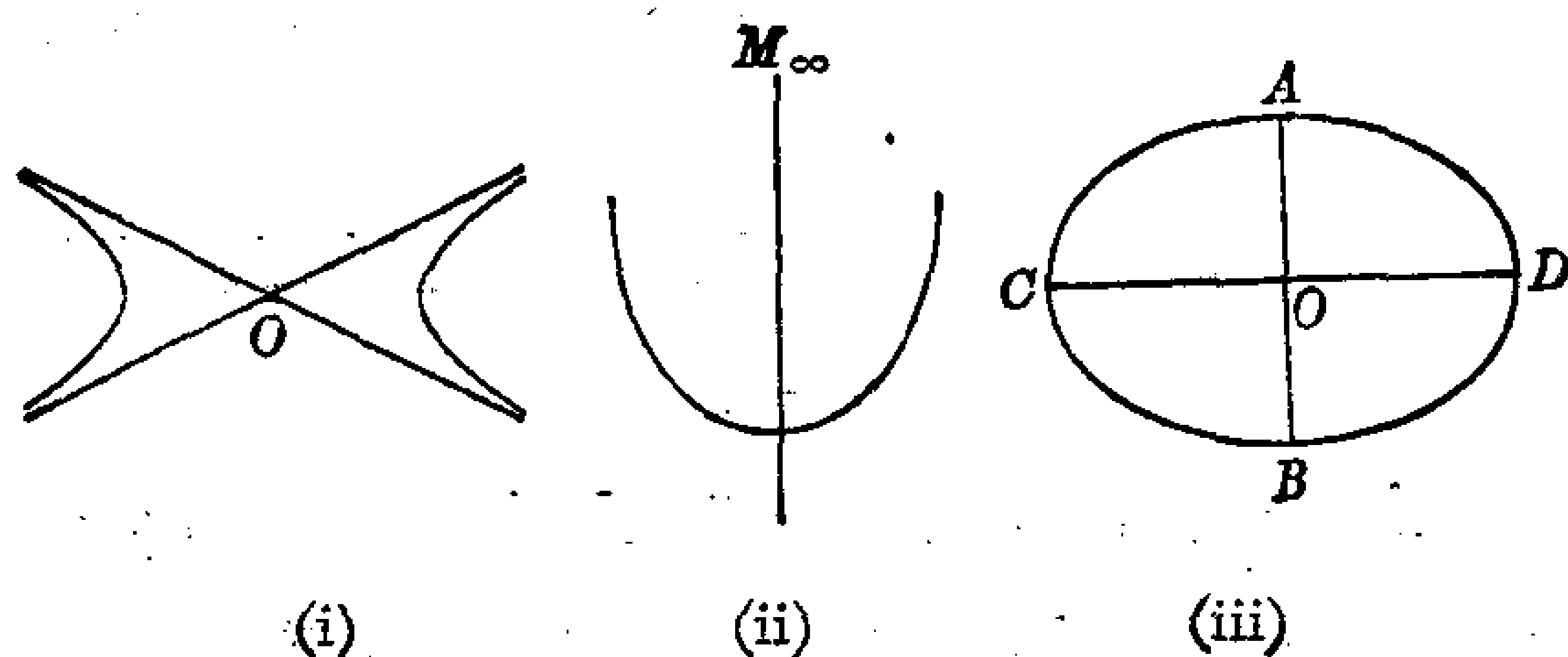


图 19

穷远直线的极点.

如果 Ω 是椭圆，令 AB 和 CD 分别是 Ω 的短轴和长轴(当 Ω 为圆时，取 AB 和 CD 为任意两条直径). 由于过 A 和 B 的两条切线平行，从而 AB 的极点是一个无穷远点 P，同样地，CD 的极点是另一个无穷远点 Q，因此 AB 和 CD 的交点 O(即椭圆的中心)就是无穷远直线的极点.

练 习 题 (九)

1. 应用定理 21.

2. 令 M 为 PQ 上的无穷远点. 则 T 是 PQ 的极点，中心 O 是无穷远直线的极点(见第 92 页练习题第 5 题)，从而 OT 是 PQ 和无穷远直线的交点 M 的极线. 于是由第 92 页练习题第 4 题可知 $(PQ|VM)=-1$，即 $(PQV)=-1$. 从而 $PV=VQ$.

3. 设 M_∞、R_∞、P_∞、Q_∞ 分别是 OM、PQ、OP、OQ 上的无穷远点. 则双曲线 Ω 的渐近线 OP 和 OQ 与 Ω 分别切于点 P_∞ 和 Q_∞. 而 OM_∞ 是点 R_∞ 的极线. 考虑无穷远

直线上四个点 P_∞、Q_∞、M_∞、R_∞. 由第 92 页练习题第 4 题即知

$$(OP, OQ|OM, ON)=(OP_\infty, OQ_\infty|OM_\infty, OR_\infty)$$
$$=-1.$$

由于直线 PQ 与此线束截出点列 P、Q、M、R_∞(注意 R_∞ 为 ON 上无穷远点，即 ON 与 PQ 的交点)，从而

$$(PQ|MR_\infty)=-1,$$

即
$$PM=MQ.$$

4. 设 M_∞ 是 l 上的无穷远点，则 M_∞ 的极线为过中心 O 的直线 m. 令 m 和 l 的交点为 M. 象上题一样，可证得

$$(PQ|MM_\infty)=-1, \quad (AB|MM_\infty)=-1.$$

于是 $QM=MP$, $BM=MA$. 从而

$$BQ=PA.$$

5. 直线 m 上的无穷远点 M 是 m 与抛物线 Ω 的一个交点. 由于 PQ 是点 A 关于 Ω 的极线，从而由第 92 页练习题第 4 题可知 $(AB|CM)=-1$, 即 $(ABC)=-1$, 于是 $AC=CB$.

6. 设 L 是 l 上的无穷远点，S 为 PQ 上的无穷远点. 过 S 可作抛物线两条切线：一条是无穷远直线，其切点为 L; 另一条是与 PQ 平行的切线，其切点为 N. 于是 LN 为点 S 的极线. 设 LN 与 PQ 交于 $\overline{M}$ (注意 $LN /\!/ l$), 则 $(S\overline{M}|PQ)=-1$. 由于 S 是无穷远点，从而 $P\overline{M}=\overline{M}Q$, 即 $\overline{M}=M$. 换句话说，M 在与 l 平行的直线 NL 上. 同样，M' 也在 NL 上. 所以 $MM' /\!/ l$.

练习题(十)

1. 先证 σ 把平行直线变成平行直线. 再利用解析几何证明 σ 必是仿射变换, 即 σ 有文中形如(3)式的表达式. 或者将 σ 扩充成射影平面上的变换, 验证 σ 是射影变换, 并且将无穷远直线变成无穷远直线.

2. (a) 设 l_1、l_2、l_3 交于点 O, l'_1、l'_2、l'_3 交于点 O'. 作直线与 l_1、l_2、l_3 交于 A、B、C, 并且使 $AB=BC$. 作直线与 l'_1、l'_2、l'_3 分别交于 A'、B'、C', 并且使 $A'B'=B'C'$(图 20). 则将 O、A、B 分别变成 O'、A'、B' 的仿射变换 σ, 必然把 C 变成 C', 从而把 l_1、l_2、l_3 分别变成 l'_1、l'_2、l'_3.

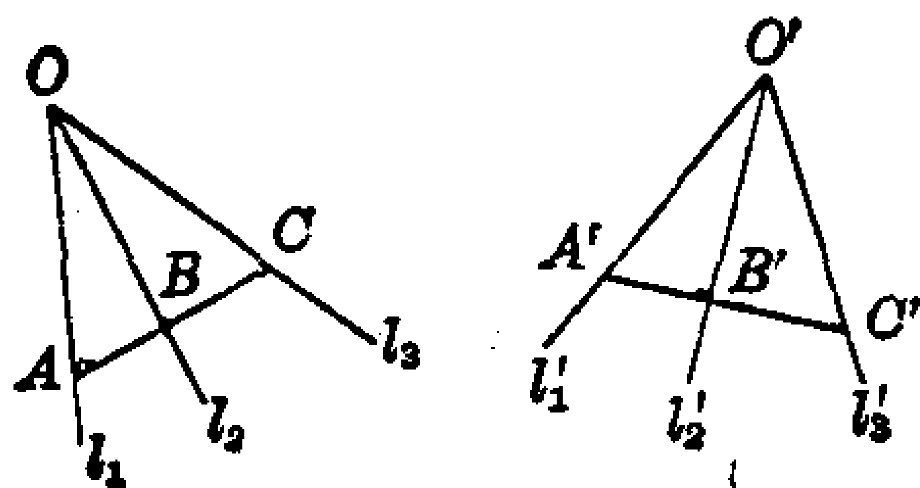


图 20

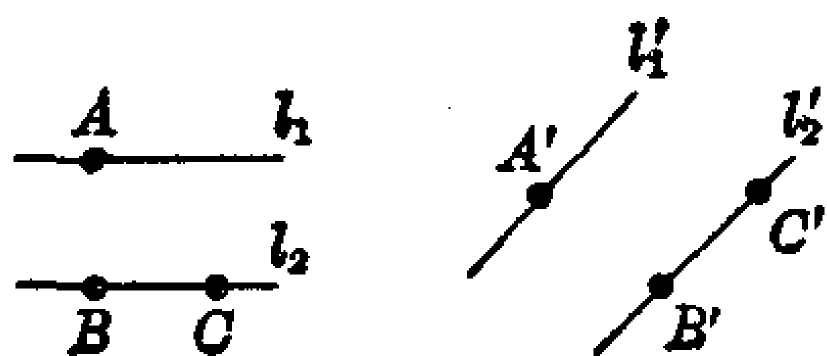


图 21

(b) 设 $l_1 /\!/ l_2$, $l'_1 /\!/ l'_2$. 在 l_1 上取点 A, 在 l_2 上取点 B 和 C. 在 l'_1 上取点 A', 在 l'_2 上取点 B' 和 C'. 则将 A、B、C 分别变成 A'、B'、C' 的仿射变换即为所求(图 21).

3. (a) 一个仿射等价类.

(b) 设 $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$、$l'_1 /\!/ l'_2 /\!/ l'_3$, 并且 l_2 在 l_1 和 l_3 之间, l'_2 在 l'_1 和 l'_3 之间, 则存在仿射变换把 l_1、l_2、l_3 分别变成 l'_1、l'_2、l'_3 的充分必要条件是:

$$\frac{l_1\text{和}l_2\text{的距离}}{l_2\text{和}l_3\text{的距离}}=\frac{l'_1\text{和}l'_2\text{的距离}}{l'_2\text{和}l'_3\text{的距离}}.$$

(c) 一个仿射等价类.

(d) 两个等腰梯形仿射等价的充分必要条件是它们的上下底之比相等.

4. $x'=-2x+y+2$, $y'=2x+y$.

5. (a), (b), (d), (f)是仿射不变性质，其余不是。

6. πab. (用仿射变换 $x'=x/a$, $y'=y/b$.)

7. $x'=2x+2y-1$, $\quad y'=-\frac{3}{2}x-2y+\frac{3}{2}$.

练 习 题 (十一)

1. **2**. 只需对圆的情形证明即可.

3. 设 AB 和 CD 是椭圆 Ω 的一对共轭直径. 在 AC 延长线上任取一点 K. 作 $KN\parallel CD$, 并且 KN 与 CB 交于 N. 则 AN 与 KB 交点 M 在 Ω 上. 当 K 变动时，用此法得到椭圆 Ω 的弧 CB. 同法画 Ω 的其余部分.

4. 只需对圆证明此命题.

5. (a) 当 Ω 是半径为 r 的圆时，可证当 Ω 的内接三角形为正三角形时，其面积最大，并且其值是 $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$，即是圆面积的 $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ 倍. 由此可知，当椭圆 Ω 的内接三角形的重心为 Ω 的中心时，其内接三角形面积最大，且是椭圆 Ω 的面积的 $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ 倍.

(b) 同上，可知当椭圆 Ω 的外切三角形的重心为 Ω 的

中心时，其面积最小，且是椭圆 Ω 的面积的 $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ 倍.

6. 由于只涉及仿射不变性，可设 Ω 是圆或者双曲线 $xy=1$. 当 Ω 为圆时容易证明. 现在设 Ω 是双曲线 $xy=1$. 若 $T=(a,\ b)\ (a\neq 0,\ b\neq 0)$，用解析几何可算出 PQ 的中点为 $\left(\frac{1}{b},\ \frac{1}{a}\right)$. 此点在 OT 上，于是 $V=\left(\frac{1}{b},\ \frac{1}{a}\right)$，即 $PV=VQ$（图 22）.

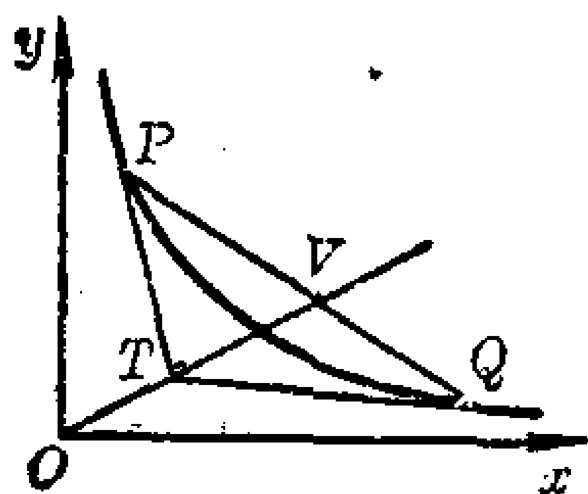


图 22

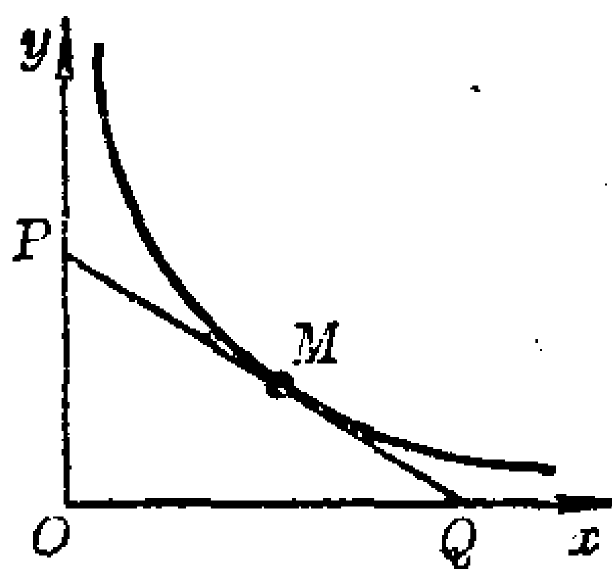


图 23

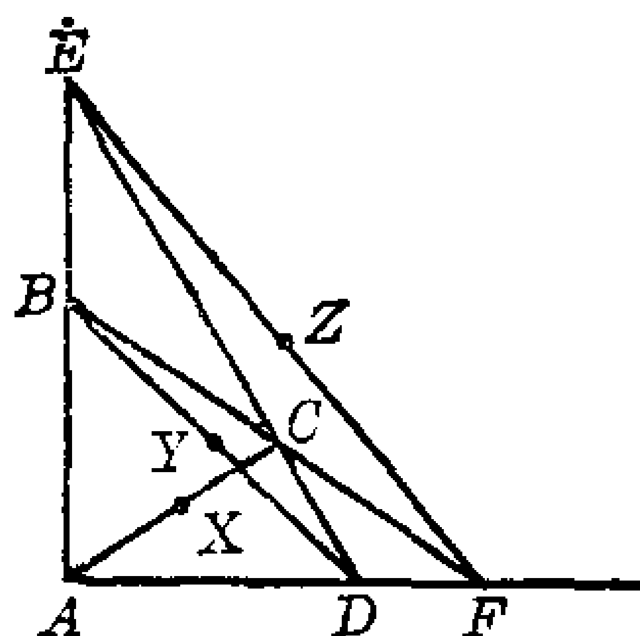


图 24

7. 不妨设 Ω 为双曲线 $xy=1$. 设 $M=(a,\ b)\ (a\neq 0)$，则 $b=\frac{1}{a}$. 用解析几何算出 $P=\left(0,\ \frac{2}{a}\right)$、$Q=(2a,\ 0)$. 从而 M 为 PQ 的中点（图 23）.

8. **11**. 设 Ω 为双曲线 $xy=1$，然后用解析几何证明.

9. **10**. 设抛物线为 $y=x^2$，然后用解析几何证明.

12. 通过仿射变换，可取 $A=(0,\ 0)$，$B(0,\ 1)$、$D=(1,\ 0)$. 于是 $E=(0,\ a)$、$F=(b,\ 0)$. 然后算出 ED 和 BF 的交点 C 的坐标为 $\left(\frac{ab-b}{ab-1},\ \frac{ab-a}{ab-1}\right)$. 从而

$$X=\left(\frac{ab-b}{2(ab-1)},\ \frac{ab-a}{2(ab-1)}\right).$$

易知 $Y=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $Z=\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

容易验证 X、Y、Z 共线.

练习题（十二）

1. (a) 两邻边长度和它们的夹角；两邻边和一条对角线的长度等等. (b) 长轴和短轴的长度.

2. (a) 空集(即：任意共点三不同直线均仿射等价于任意共点三不同直线). (b) 简单比. (c) 上下底之比.

3. 变换(*)如果是保距的，它把 $A=(0, 0)$、$B=(1, 0)$、$C=(0, 1)$ 分别变成 $A'=(b_1, b_2)$、$B'=(a_{11}+b_1, a_{21}+b_2)$、$C'=(a_{12}+b_1, a_{22}+b_2)$. 由 $|A'B'|=|AB|=1$、$|A'C'|=|AC|=1$，得出 $a_{11}^2+a_{21}^2=a_{12}^2+a_{22}^2=1$. 由于保距变换保持直线的垂直性，从 $AB\perp AC$ 可知 $A'B'\perp A'C'$. 由解析几何，即知这相当于 $a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0$. 反之，假设 $a_{11}^2+a_{21}^2+a_{12}^2+a_{22}^2=1$、$a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0$，对于欧氏平面上的任意两点 $P=(x_1, y_1)$ 和 $Q=(x_2, y_2)$，设变换(*)把它们分别变成 $P'=(x_1', y_1')$ 和 $Q'=(x_2', y_2')$，则

$$\begin{aligned}
|P'Q'|^2&=(y_2'-y_1')^2+(x_2'-x_1')^2\\
&=[(a_{21}x_2+a_{22}y_2)-(a_{21}x_1+a_{22}y_1)]^2\\
&\quad+[(a_{11}x_2+a_{12}y_2)-(a_{11}x_1+a_{12}y_1)]^2\\
&=[a_{21}(x_2-x_1)+a_{22}(y_2-y_1)]^2\\
&\quad+[a_{11}(x_2-x_1)+a_{12}(y_2-y_1)]^2\\
&=(a_{21}^2+a_{11}^2)(x_2-x_1)^2+(a_{22}^2+a_{12}^2)(y_2-y_1)^2
\end{aligned}$$

$$+2(a_{21}a_{22}+a_{11}a_{12})(x_2-x_1)(y_2-y_1)$$
$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=|PQ|^2.$$

从而(*)是保距变换.

4. 仿射变换(*)将面积为 S 的三角形变成面积为 S' 的三角形，由第 112 页定理 4 的证明，可知

$$S'/S=|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|.$$

因此，若(*)是保距变换，由于它保持面积不变，可知

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\pm 1.$$

反之，例子 $x'=2x,\ y'=\frac{1}{2}y$ 表明逆命题不成立.

5. 设(*)是保距变换，则由 $a_{11}^2+a_{21}^2=1$，可令 $a_{11}=\cos\theta$，$a_{21}=\sin\theta$. 而 $a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0$ 给出

$$a_{12}\cos\theta+a_{22}\sin\theta=0.$$

如果 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1$，即

$$a_{22}\cos\theta-a_{12}\sin\theta=1,$$

联立，可解出 $a_{22}=\cos\theta$、$a_{12}=-\sin\theta$. 于是

$$x'=x\cos\theta-y\sin\theta+b_1.$$
$$y'=x\sin\theta+y\cos\theta+b_2.$$

这是先以逆时针方向绕原点旋转 θ 角，然后作平移. 如果 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=-1$，即 $a_{22}\cos\theta-a_{12}\sin\theta=-1$，则

$$a_{22}=-\cos\theta、\quad a_{12}=\sin\theta.$$

于是

$$x'=x\cos\theta+y\sin\theta+b_1,$$
$$y'=x\sin\theta-y\cos\theta+b_2.$$

这是先作反射 λ，然后再作上述的旋转和平移.